

1. Comunicazioni al Dipartimento

- ✓ Il Presidente comunica....
- ✓ Il Presidente informa che...

4.1 Commissione Spazi – subentro dott.ssa Ilaria Capri

Il Presidente informa che è necessario procedere alla sostituzione della sig.ra Franca Ventricini, in quanto collocata a riposo, come membro della Commissione Spazi nominata con proprio Decreto rep. 228/2021, prot. n. 2182 del 24.06.2021.

Propone il subentro della dott.ssa Ilaria Capri, assegnata alla Segreteria Contabile DISIM.

Ricorda che la durata del mandato dei componenti la commissione coincide con la durata del mandato del Direttore del Dipartimento.

Il Consiglio,

VISTO il Regolamento generale del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica

VISTO il Decreto del Direttore rep. 228/2021, prot. n. 2182 del 24.06.2021 di istituzione della Commissione Spazi per il triennio 2021-2024

VISTA la proposta di subentro presentata dal Presidente

all'unanimità / a maggioranza

approva il subentro della dott.ssa Ilaria Capri al posto della sig.ra Franca Ventricini nella composizione della Commissione Spazi per il triennio 2021-2024.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

Il Presidente sottopone all'approvazione del Consiglio la proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale, già inviati via posta elettronica a tutti i membri, redatto dal Segretario Contabile sulla scorta delle giacenze dei vari progetti attivi, che vengono riepilogati nella seguente tabella:

	2023		2024		2025	
Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04CONS.INTERMATHS		250.000,00		200.000,00		177.800,00
04CONS.INTERMATHS-2022		75.000,00		100.000,00		175.000,00
Proventi per corsi diversi (inclusi corsi singoli)	0,00	325.000,00	0,00	300.000,00	0,00	352.800,00
Totale CA.03.01.01.02.05	325.000,00		300.000,00		352.800,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
UTILI_MOBILWEBTEC1920		5.861,00				
UTILI_MOBILWEBTEC2021				1.833,00		
Contributi per master I livello	0,00	5.861,00	0,00	1.833,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.01.02.06	5.861,00		1.833,00		0,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04CT.ARMUNDIA-PROTOTIPO		5.000,00		5.000,00		
04CT.BALANCHAIN	12.000,00	10.000,00	16.000,00			
04CT.CA1515-RFI	180.000,00	95.000,00	240.000,00		249.000,00	
04CT.LEONARDO		21.670,00				
04CT.LAQUILA2009		3.500,00				
04CT.ROT-CASSIOLI	6.600,00	8.800,00	6.600,00			
04CT.IMP	5.000,00	5.000,00				
04CT.ECONET	20.000,00	10.000,00	20.000,00			
04CT.SIMPP-RFI	77.413,00	65.550,00		60.000,00		
04CT.RADIOLABS-2018	5.800,00	2.400,00				
Proventi da attività c/terzi con privati	306.813,00	226.920,00	282.600,00	65.000,00	249.000,00	0,00
Totale CA.03.01.02.01.02	533.733,00		347.600,00		249.000,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04MIUR.PON2014.SAFE		9.452,00				
04MIUR.PON2014.VASARI		36.000,00		10.800,00		
04PRIN.LELLICHIESA		17.000,00				

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

04PRIN17.CECATI		45.000,00		15.828,00		
04PRIN17.DAMBROSIO		55.000,00		48.885,00		
04PRIN17.INVERARDI		30.000,00				
04PRIN20.DIRUSCIO		35.000,00		55.000,00		63.400,00
04PRIN20.DONATELLI		52.000,00		53.000,00		53.750,00
04PRIN20.GIACOMELLI		18.000,00		6.694,00		
PON_DISIM		42.000,00				
04MIUR.DM61315		54.300,00				
Contratti e convenzioni con MIUR	0,00	393.752,00	0,00	190.207,00	0,00	117.150,00
Totale CA.03.01.03.01.01		393.752,00		190.207,00		117.150,00

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04MISE.LEONARDO		38.661,00				
04MISE.ORIGINAL		56.837,00				
Contratti e convenzioni con altri Ministeri	0,00	95.498,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.03.02.01		95.498,00		0,00		0,00

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
02UE.IREL40.DISIM		21.000,00		60.000,00		
04UE.CHOREVOLUT		85.760,00				
04UE.GEO-SAFE		13.733,00				
04UE.LOWCOMOTE		89.800,00		100.000,00		
04UE.TYPHON		35.000,00				
04UE.SOBIGDATA2020		10.882,00				
04UE.AIDOART		25.000,00		80.000,00		89.000,00
04UE.VALU3S		23.747,00		40.000,00		
Contratti e convenzioni con Unione Europea	0,00	304.922,00	0,00	280.000,00	0,00	89.000,00
Totale CA.03.01.03.03.01		304.922,00		280.000,00		89.000,00

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04UE.OPTIMIST.DISIM		14.400,00		30.000,00		
Contratti e convenzioni con Organismi pubblici esteri e internazionali	0,00	14.400,00	0,00	30.000,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.03.03.02		14.400,00		30.000,00		0,00

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
--------------------------------	---------	----------	---------	----------	---------	----------

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

04PUB.POR-FESR-CONNECTPA		72.000,00		50.000,00		
04PUB.POR-FESR-CYBER-TRAINER		18.051,00				
Contratti e convenzioni con Regione Abruzzo	0,00	90.051,00	0,00	50.000,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.03.04.01	90.051,00		50.000,00		0,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04LOC.MONTELUCCO		4.000,00				
Contratti e convenzioni con Comuni	0,00	4.000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.03.04.03	4.000,00		0,00		0,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PNRR.SoBigData.it		1.510.000,00		1.200.000,00		800.000,00
Contratti e convenzioni con Enti di ricerca pubblici	0,00	1.510.000,00	0,00	1.200.000,00	0,00	800.000,00
Totale CA.03.01.03.04.04	1.510.000,00		1.200.000,00		800.000,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PUB.ASI.ReR		51.000,00		30.300,00		
04PUB.CURR-DIGITALI		4.925,00				
Contratti e convenzioni con altre amministrazioni pubbliche	0,00	55.925,00	0,00	30.300,00	0,00	0,00
Totale CA.03.01.03.04.06	55.925,00		30.300,00		0,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PUB.DOTTORATO-PON		36.920,00		36.000,00		12.000,00
Contributi correnti da MIUR per borse di dottorato	0,00	36.920,00	0,00	36.000,00	0,00	12.000,00
Totale CA.03.02.01.01.02	36.920,00		36.000,00		12.000,00	

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
DM1062_GREEN_DISIM		31.336,00		50.000,00		
DM1062_INNOVAZIONE_DISIM		152.000,00		115.690,00		
DM737.PNRR_DISIM		260.000,00		260.000,00		183.900,00
Altri contributi correnti dal MIUR	0,00	443.336,00	0,00	425.690,00	0,00	183.900,00

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

Totale CA.03.02.01.01.08	443.336,00	425.690,00	183.900,00
---------------------------------	-------------------	-------------------	-------------------

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04EACEA.EPICO		25.000,00		25.000,00		22.900,00
04EACEA.INTERMATHS		1.113.000,00		1.100.000,00		900.000,00
04EACEA.SE4GD		35.000,00		35.000,00		32.000,00
04EACEA.EDISS		25.000,00		75.000,00		34.000,00
04ERAS.TEACH4EDU4		20.000,00		20.000,00		20.000,00
04UE.SOBIGDATA-RIPPP		14.250,00		25.000,00		13.000,00
Contributi correnti da Unione Europea e Resto del Mondo	0,00	1.232.250,00	0,00	1.280.000,00	0,00	1.021.900,00
Totale CA.03.02.03.01.01	1.232.250,00	1.280.000,00	1.280.000,00	1.021.900,00		

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PUB.BDE2018		72.000,00		61.000,00		52.000,00
Contributi da altri enti pubblici di ricerca	0,00	72.000,00	0,00	61.000,00	0,00	52.000,00
Totale CA.03.02.04.01.02	72.000,00	61.000,00	61.000,00	52.000,00		

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PRIV.PINKAMP-20-21		2.758,00				
Contributi da Consorzi privati	0,00	2.758,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.02.05.01.01	2.758,00	0,00	0,00	0,00		

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PRIV.FAQ-PINKAMP		2.000,00				
Contributi da Fondazioni	0,00	2.000,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.02.05.01.02	2.000,00	0,00	0,00	0,00		

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
04PRIV.GUNPOWDER		30.814,00				
Contributi da altri soggetti privati	0,00	30.814,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.02.05.01.04	30.814,00	0,00	0,00	0,00		

Codice identificativo progetto	entrate	risconti	entrate	risconti	entrate	risconti
--------------------------------	---------	----------	---------	----------	---------	----------

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

04LOC.COMUNE.AQ-ACCESSI		1.467,00				
04LOC.COMUNE.AQ-PERCORSI		93,00				
Contributi da Province e Comuni	0,00	1.560,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Totale CA.03.02.06.01.01	1.560,00		0,00		0,00	

TOTALE ENTRATE	5.154.780,00	4.232.630,00	2.877.750,00
Utilizzo fondi ex-COFI 03.05.01.06	100.000,00	120.000,00	140.000,00
Totale Budget	5.254.780,00	4.352.630,00	3.017.750,00

Assegnazione di Ateneo 2023	455.700,00
Budget investimenti di Ateneo	-115.000,00
Ammortamento investimenti di Ateneo	20.700,00
Sbilancio	361.400,00
TOTALE BUDGET ATHENA	5.616.180,00

La previsione dei costi e degli investimenti a Budget per il triennio, allegata al presente verbale, è stata costruita sulla base dello storico delle spese sostenute nell'ultimo triennio ed delle specifiche necessità comunicate dai Responsabili dei progetti in itinere, con particolare riferimento al Progetto PNRR SoBigData.it

Il Presidente invita il Consiglio ad esprimersi in merito.

Il Consiglio,

- VISTA** la Legge 30 dicembre 2010 n. 240 "Norme in materia di organizzazione delle Università, di personale accademico e reclutamento, nonché delega al Governo per incentivare la qualità e l'efficienza del sistema universitario" e relativi decreti attuativi;
- VISTO** il Decreto Legislativo 31 maggio 2011 n.91 "Disposizioni recanti attuazione dell'articolo 2 della legge 31 dicembre 2009, n.196, in materia di adeguamento ed armonizzazione dei sistemi contabili";
- VISTA** la Legge 6 novembre 2010, n. 190 "Disposizioni per la prevenzione e la repressione della corruzione e dell'illegalità nella pubblica amministrazione";
- VISTO** il Decreto Legislativo 27 gennaio 2012, n. 18 recante "Introduzione di un sistema di contabilità economico-patrimoniale e analitica, del bilancio unico e del bilancio consolidato nelle università, a norma dell'art.5, comma1, lettera b), e 4, lettera a), della legge n. 240/2010;
- VISTO** il Decreto Ministeriale 14 gennaio 2019, n.19 "Principi contabili e schemi di bilancio in contabilità economico-patrimoniale per le università";
- VISTO** il Decreto Interministeriale 10 dicembre 2015, n. 925 "Schemi di budget economico e budget degli investimenti";

5.1 Approvazione proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale

VISTO il Decreto Interministeriale 8 giugno 2017, n. 394 "Revisione ed aggiornamento del D.I. 14 gennaio 2014 n. 19";

VISTO il Decreto Direttoriale 1055 del 30 maggio 2019, "Adozione della terza edizione del Manuale Tecnico Operativo";

RICHIAMATO lo Statuto e il Regolamento di Contabilità vigenti in Ateneo;

VISTA l'assegnazione da parte dell'Ateneo di euro 455.700,00 sul Budget 2023 per le necessità del Dipartimento relative a Dottorato, Didattica, Assegni di Ricerca e funzionamento;

all'unanimità/ a maggioranza

approva la proposta di Budget economico e degli investimenti annuale e triennale che concorrerà alla formazione del bilancio unico d'Ateneo.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

Università degli studi di L'AQUILA													
BUDGET INVESTIMENTI													
INVESTIMENTI/IMPIEGHI		2023				2024				2025			
		FONTI DI FINANZIAMENTO				FONTI DI FINANZIAMENTO				FONTI DI FINANZIAMENTO			
		INVESTIMENTO	CONTRIBUTO DA TERZI FINALIZZATI (IN C/CAPITALE E/O C/IMPIANTI)	RISORSE DA INDEBITAMENTO	RISORSE PROPRIE	INVESTIMENTO	CONTRIBUTO DA TERZI FINALIZZATI (IN C/CAPITALE E/O C/IMPIANTI)	RISORSE DA INDEBITAMENTO	RISORSE PROPRIE	INVESTIMENTO	CONTRIBUTO DA TERZI FINALIZZATI (IN C/CAPITALE E/O C/IMPIANTI)	RISORSE DA INDEBITAMENTO	RISORSE PROPRIE
CA.01.01.01	Immobilitazioni immateriali	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.01	Costi di impianto, d'ampliamento e di sviluppo	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.02.01	Diritti di brevetto e diritti di utilizzazione delle opere dell'ingegno	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.02.02	Software acquistato a titolo di proprietà	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.03	Concessioni, licenze, marchi, e diritti simili	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.04	Immobilizzazioni in corso e acconti	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.05.01	Altre immobilizzazioni immateriali	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.01.01.05.02	Manutenzione straordinaria su beni di terzi	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02	Immobilitazioni Materiali	1,920,000.00	0.00	0.00	1,920,000.00	1,400,000.00	0.00	0.00	1,400,000.00	515,000.00	0.00	0.00	515,000.00
CA.01.01.02.01.02	Fabbricati	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.01.04	Costruzioni leggere	500,000.00	0.00	0.00	500,000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.02.01	Impianti generici (riscaldamento, condizionamento, elettrico, ...)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.02.02	Impianti specifici (impianti di lab, impianti video proiezione per aule...)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.02.03	Attrezzature informatiche, audio video ed elettriche	1,240,000.00	0.00	0.00	1,240,000.00	1,240,000.00	0.00	0.00	1,240,000.00	360,000.00	0.00	0.00	360,000.00
CA.01.01.02.02.04	Altre attrezzature non scientifiche	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.03.01	Attrezzature scientifiche per laboratori	80,000.00	0.00	0.00	80,000.00	80,000.00	0.00	0.00	80,000.00	80,000.00	0.00	0.00	80,000.00
CA.01.01.02.03.02	Altre attrezzature scientifiche	20,000.00	0.00	0.00	20,000.00	20,000.00	0.00	0.00	20,000.00	20,000.00	0.00	0.00	20,000.00
CA.01.01.02.04.01	Libri, opere d'arte, d'antiquariato e museali	20,000.00	0.00	0.00	20,000.00	20,000.00	0.00	0.00	20,000.00	15,000.00	0.00	0.00	15,000.00
CA.01.01.02.04.02	Collezioni scientifiche	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.05.01	Mobili ed Arredi	60,000.00	0.00	0.00	60,000.00	40,000.00	0.00	0.00	40,000.00	40,000.00	0.00	0.00	40,000.00
CA.01.01.02.06.01	Immobilizzazioni in corso e acconti	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.07.01	Autocarri, motoveicoli e simili	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.07.02	Autovetture da trasporto	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.07.04	Manutenzione straordinaria su beni propri	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.02.07.05	Ricostruzioni e ripristini su beni propri	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.03	Immobilitazioni Finanziarie	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CA.01.01.03.01.01	Partecipazioni	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TOTALE GENERALE		1,920,000.00	0.00	0.00	1,920,000.00	1,400,000.00	0.00	0.00	1,400,000.00	515,000.00	0.00	0.00	515,000.00
		DIFFERENZA	0.00			DIFFERENZA	0.00			DIFFERENZA	0.00		

BUDGET ECONOMICO

			2023	2024	2025
CA.03	PROVENTI OPERATIVI		5,254,780.00	4,352,630.00	3,017,750.00
CA.03.01	PROVENTI PROPRI	Ricavo	3,333,142.00	2,429,940.00	1,607,950.00
CA.03.01.01	PROVENTI PER LA DIDATTICA	Ricavo	330,861.00	301,833.00	352,800.00
CA.03.01.01.01	Tasse e contributi per corsi di laurea	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.01.01	Tasse e contributi per laurea di primo livello	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.01.02	Tasse e contributi per lauree magistrali, specialistiche e v.o.	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.01.03	Tasse e contributi per lauree a ciclo unico	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02	Proventi da altri corsi	Ricavo	330,861.00	301,833.00	352,800.00
CA.03.01.01.02.01	Contributi per corsi di perfezionamento e corsi di formazione	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.02	Tasse e contributi per scuole di specializzazione	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.03	Tasse e contributi per corsi di dottorato	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.04	Tasse per esami di stato e contributi diversi (incluso accesso programmato, ricognizioni, equipollenza e simili)	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.05	Proventi per corsi diversi (inclusi corsi singoli)	Ricavo	325,000.00	300,000.00	352,800.00
CA.03.01.01.02.06	Tasse e contributi per master I livello	Ricavo	5,861.00	1,833.00	0.00
CA.03.01.01.02.07	Tasse e contributi per master II livello	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.08	Diritti di segreteria (trasferimenti in uscita e in arrivo, passaggi di corso, pergamene, duplicati, spedizioni e simili)	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.02.09	Proventi da TFA e sostegno	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.03	Proventi da attività didattica commerciale	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.03.01	Corrispettivi per corsi di lingue	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.01.03.02	Corrispettivi per altre attività formative	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.02	PROVENTI DA RICERCHE COMMISSIONATE E TRASFERIMENTO TECNOLOGICO	Ricavo	533,733.00	347,600.00	249,000.00
CA.03.01.02.01	Proventi da attività c/terzi	Ricavo	533,733.00	347,600.00	249,000.00
CA.03.01.02.01.01	Proventi da attività c/terzi con enti pubblici	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.02.01.02	Proventi da attività c/terzi con privati	Ricavo	533,733.00	347,600.00	249,000.00
CA.03.01.02.02	Diritti di sfruttamento licenze, marchi e brevetti commerciali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.02.02.01	Diritti di sfruttamento licenze, marchi e brevetti commerciali da enti pubblici	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.02.02.02	Diritti di sfruttamento licenze, marchi e brevetti commerciali da privati	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03	PROVENTI DA RICERCHE CON FINANZIAMENTI COMPETITIVI	Ricavo	2,468,548.00	1,780,507.00	1,006,150.00
CA.03.01.03.01	Ricerche su finanziamenti competitivi da MIUR	Ricavo	393,752.00	190,207.00	117,150.00
CA.03.01.03.01.01	Contratti e convenzioni con MIUR	Ricavo	393,752.00	190,207.00	117,150.00
CA.03.01.03.02	Ricerche su finanziamenti competitivi da altri Ministeri	Ricavo	95,498.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.02.01	Contratti e convenzioni con altri Ministeri	Ricavo	95,498.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.03	Ricerche su finanziamenti competitivi da UE e resto del mondo	Ricavo	319,322.00	310,000.00	89,000.00
CA.03.01.03.03.01	Contratti e convenzioni con Unione Europea	Ricavo	304,922.00	280,000.00	89,000.00
CA.03.01.03.03.02	Contratti e convenzioni con Organismi pubblici esteri e internazionali	Ricavo	14,400.00	30,000.00	0.00
CA.03.01.03.03.03	Contratti e convenzioni con soggetti privati esteri e internazionali	Ricavo	0.00	0.00	0.00

CA.03.01.03.04	Ricerche su finanziamenti competitivi da altri enti pubblici nazionali	Ricavo	1,659,976.00	1,280,300.00	800,000.00
CA.03.01.03.04.01	Contratti e convenzioni con Regione Abruzzo	Ricavo	90,051.00	50,000.00	0.00
CA.03.01.03.04.02	Contratti e convenzioni con Province	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.04.03	Contratti e convenzioni con Comuni	Ricavo	4,000.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.04.04	Contratti e convenzioni con Enti di ricerca pubblici	Ricavo	1,510,000.00	1,200,000.00	800,000.00
CA.03.01.03.04.05	Contratti e convenzioni con Aziende ospedaliere e altri istituti sanitari	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.04.06	Contratti e convenzioni con altre amministrazioni pubbliche	Ricavo	55,925.00	30,300.00	0.00
CA.03.01.03.04.07	Contratti e convenzioni con altre Regioni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.04.08	Contratti e convenzioni con Consorzi pubblici	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.04.09	Contratti e convenzioni con altre Università	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.05	Ricerche su finanziamenti competitivi da soggetti privati nazionali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.05.01	Contratti e convenzioni con Consorzi privati	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.05.02	Contratti e convenzioni con Fondazioni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.05.03	Contratti e convenzioni con privati	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.01.03.05.04	Contratti e convenzioni con Enti di ricerca privati	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02	CONTRIBUTI	Ricavo	1,821,638.00	1,802,690.00	1,269,800.00
CA.03.02.01	CONTRIBUTI MIUR E ALTRE AMMINISTRAZIONI CENTRALI	Ricavo	480,256.00	461,690.00	195,900.00
CA.03.02.01.01	Contributi correnti da MIUR	Ricavo	480,256.00	461,690.00	195,900.00
CA.03.02.01.01.01	Contributi correnti da MIUR per FFO	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.02	Contributi correnti da MIUR per borse di dottorato	Ricavo	36,920.00	36,000.00	12,000.00
CA.03.02.01.01.03	Contributi correnti da MIUR per borse per specializzazioni mediche	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.04	Contributi correnti da MIUR per assegni di ricerca	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.05	Contributi correnti da MIUR per attività sportiva	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.06	Contributi correnti da MIUR per la programmazione del sistema universitario	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.07	Contributi correnti da MIUR per fondo giovani DM 976/2014	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.07.01	Mobilità internazionale degli studenti (art.1)	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.07.02	Tutorato e attività didattiche integrative, propedeutiche e di recupero (art.2)	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.07.03	Aree disciplinari di particolare interesse comunitario e Piano lauree scientifiche (art.3)	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.01.08	Altri contributi correnti da MIUR	Ricavo	443,336.00	425,690.00	183,900.00
CA.03.02.01.02	Contributi correnti da altri Ministeri	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.02.03	Contributi correnti da altri Ministeri	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.03	Contributi per investimenti da MIUR	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.03.01	Contributi per investimenti da MIUR per edilizia	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.03.02	Contributi per investimenti da MIUR per ricerca	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.04	Contributi per investimenti da altri Ministeri ed amministrazioni centrali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.01.04.01	Contributi per investimenti da altri Ministeri ed amministrazioni centrali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02	CONTRIBUTI REGIONI E PROVINCE AUTONOME	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.01	Contributi correnti da Regione Abruzzo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.01.15	Contributi correnti da Regione Abruzzo	Ricavo	0.00	0.00	0.00

CA.03.02.02.02	Contributi per investimenti da Regione Abruzzo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.02.01	Contributi per investimenti da Regione Abruzzo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.03	Altri contributi da enti locali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.03.01	Contributi correnti da altre Regioni e province autonome	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.02.03.02	Contributi per investimenti da altre Regioni e province autonome	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.03	CONTRIBUTI UNIONE EUROPEA E RESTO DEL MONDO	Ricavo	1,232,250.00	1,280,000.00	1,021,900.00
CA.03.02.03.01	Contributi da Unione Europea	Ricavo	1,232,250.00	1,280,000.00	1,021,900.00
CA.03.02.03.01.01	Contributi correnti da Unione Europea e Resto del Mondo	Ricavo	1,232,250.00	1,280,000.00	1,021,900.00
CA.03.02.03.01.02	Contributi per investimenti da Unione Europea e Resto del Mondo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.04	CONTRIBUTI DA ALTRI (Pubblici)	Ricavo	72,000.00	61,000.00	52,000.00
CA.03.02.04.01	Contributi da enti pubblici vari	Ricavo	72,000.00	61,000.00	52,000.00
CA.03.02.04.01.01	Contributi da Azienda Sanitaria locale	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.04.01.02	Contributi da altri enti pubblici di ricerca	Ricavo	72,000.00	61,000.00	52,000.00
CA.03.02.04.01.03	Contributi da Consorzi pubblici	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.04.01.04	Contributi per investimenti da altri enti pubblici	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.05	CONTRIBUTI DA ALTRI (Privati)	Ricavo	35,572.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01	Contributi da privati	Ricavo	35,572.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01.01	Contributi da Consorzi privati	Ricavo	2,758.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01.02	Contributi da Fondazioni	Ricavo	2,000.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01.03	Contributi correnti da istituti di credito	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01.04	Contributi da altri soggetti privati	Ricavo	30,814.00	0.00	0.00
CA.03.02.05.01.05	Contributi per investimenti da privati	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.06	CONTRIBUTI ALTRE AMMINISTRAZIONI LOCALI	Ricavo	1,560.00	0.00	0.00
CA.03.02.06.01	Contributi atle amministrazioni locali	Ricavo	1,560.00	0.00	0.00
CA.03.02.06.01.01	Contributi da Province e Comuni	Ricavo	1,560.00	0.00	0.00
CA.03.02.06.01.02	Contributi per investimenti da Province e Comuni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.07	CONTRIBUTI DA UNIVERSITA'	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.07.01	Contributi da Università	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.07.01.01	Contributi da università italiane	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.07.01.02	Contributi da università straniere	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.02.07.01.03	Contributi per investimenti da università	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.03	PROVENTI PER ATTIVITA' ASSISTENZIALE E SERVIZIO SANITARIO NAZIONALE	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.03.01	PROVENTI PER ATTIVITA' ASSISTENZIALE	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.03.01.01	Proventi per attività assistenziale e servizio sanitario nazionale	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.03.01.01.01	Proventi per attività assistenziale e servizio sanitario nazionale	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.04	PROVENTI PER GESTIONE DIRETTA INTERVENTI DIRITTO ALLO STUDIO	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.04.01	PROVENTI PER GESTIONE DIRETTA INTERVENTI DIRITTO ALLO STUDIO	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.04.01.01	Proventi per gestione diretta interventi diritto allo studio	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.04.01.01.01	Proventi per gestione diretta interventi diritto allo studio	Ricavo	0.00	0.00	0.00

CA.03.05	ALTRI PROVENTI E RICAVI DIVERSI	Ricavo	100,000.00	120,000.00	140,000.00
CA.03.05.01	ALTRI PROVENTI E RICAVI DIVERSI	Ricavo	100,000.00	120,000.00	140,000.00
CA.03.05.01.01	Proventi diversi	Ricavo	100,000.00	120,000.00	140,000.00
CA.03.05.01.01.02	Plusvalenze ordinarie da alienazioni	Ricavo	100,000.00	120,000.00	140,000.00
CA.03.05.01.03	Proventi patrimoniali	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.03.01	Proventi patrimoniali da immobili	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.04	Recuperi, rimborsi e arrotondamenti attivi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.04.01	Recuperi e rimborsi di varia natura	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.04.02	Rimborsi per personale comandato	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.04.03	Arrotondamenti e abbuoni attivi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.05	Proventi da cessioni di beni e servizi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.05.01	Proventi da cessioni di beni e servizi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.06	Utilizzo fondi propri per transazione da contabilità finanziaria	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.07	Utilizzo fondi da riserve vincolate	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.08	Sponsorizzazioni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.09	Fitti attivi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.10	Proventi e ricavi diversi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.05.01.11	Benefit da Istituto cassiere	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06	RIMANENZE FINALI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.01	RIMANENZE FINALI LAVORI IN CORSO	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.01.01	Rimanenze finali lavori in corso	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.01.01.01	Rimanenze finali lavori in corso	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.02	RIMANENZE FINALI MATERIE DI CONSUMO PER LABORATORI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.02.01	Rimanenze finali materie di consumo per laboratori	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.02.01.01	Rimanenze finali materie di consumo per laboratori	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.03	RIMANENZE FINALI MATERIE DI CONSUMO	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.03.01	Rimanenze finali materie di consumo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.06.03.01.01	Rimanenze finali materie di consumo	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.07	INCREMENTI DI IMMOBILIZZAZIONI PER LAVORI INTERNI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.07.01	INCREMENTI DI IMMOBILIZZAZIONI PER LAVORI INTERNI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.07.01.01	Incrementi di immobilizzazioni per lavori interni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.03.07.01.01.01	Incrementi di immobilizzazioni per lavori interni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.04	COSTI OPERATIVI		5,616,180.00	4,352,630.00	3,017,750.00
CA.04.01	COSTI DEL PERSONALE DOCENTE E RICERCATORE	Costo	2,575,000.00	1,861,000.00	1,132,000.00
CA.04.01.01	PERSONALE DEDICATO ALLA DIDATTICA E ALLA RICERCA	Costo	1,820,000.00	1,380,000.00	810,000.00
CA.04.01.01.01	Docenti e ricercatori a tempo indeterminato	Costo	250,000.00	150,000.00	150,000.00
CA.04.01.01.01.01	Retribuzioni fisse al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.01.01	Assegni fissi al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.01.02	Contributi obbligatori su assegni fissi al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.01.01.01.01.03	Contributi per indennità fine servizio su assegni fissi al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.01.04	IRAP su assegni fissi al personale docente e ricercatori a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.02	Incarichi didattici al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.02.01	Incarichi didattici al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.02.02	Contributi obbligatori su incarichi didattici al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.02.03	IRAP su incarichi didattici al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.03	Altre competenze al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.03.01	Altre competenze al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.03.02	Contributi obbligatori su altre competenze al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.03.03	IRAP su altre competenze al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.04	Competenze al personale docente e ricercatore su attività commerciale	Costo	250,000.00	150,000.00	150,000.00
CA.04.01.01.01.04.01	Competenze al personale docente e ricercatore su attività commerciale	Costo	250,000.00	150,000.00	150,000.00
CA.04.01.01.01.04.02	IRAP su competenze al personale docente su attività di commerciale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.05	Arretrati al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.05.01	Arretrati al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.05.02	Contributi obbligatori su arretrati al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.05.03	Contributi per indennità fine servizio su arretrati al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.05.04	IRAP su arretrati al personale docente e ricercatore a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06	Docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.01	Integrazione stipendiale a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.02	Contributi obbligatori su integrazione stipendiale a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.03	Contributi per indennità di fine servizio su integrazione stipendiale a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.04	IRAP su integrazione stipendiale a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.05	Compensi accessori e libera professione a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.06	Contributi obbligatori su compensi accessori e libera professione a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.01.06.07	IRAP su compensi accessori e libera professione a docenti e ricercatori convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02	Ricercatori a tempo determinato	Costo	600,000.00	500,000.00	300,000.00
CA.04.01.01.02.01	Retribuzioni a ricercatori a tempo determinato	Costo	600,000.00	500,000.00	300,000.00
CA.04.01.01.02.01.01	Retribuzioni a ricercatori a tempo determinato	Costo	600,000.00	500,000.00	300,000.00
CA.04.01.01.02.01.02	Contributi obbligatori su retribuzioni per ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.01.03	Contributi per indennità TFR su retribuzioni per ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.01.04	IRAP su retribuzioni ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.02	Incarichi didattici a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.02.01	Incarichi didattici a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.02.02	Contributi obbligatori su incarichi didattici a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.02.03	IRAP su incarichi didattici a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.03	Altre competenze a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.03.01	Altre competenze a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.03.02	Contributi obbligatori su altre competenze a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.01.01.02.03.03	IRAP su altre competenze a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.04	Arretrati a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.04.01	Arretrati a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.04.02	Contributi obbligatori su arretrati a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.04.03	Contributi per indennità TFR su arretrati a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.02.04.04	IRAP su arretrati a ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.03	Collaborazioni scientifiche	Costo	900,000.00	680,000.00	310,000.00
CA.04.01.01.03.01	Assegnisti di ricerca	Costo	720,000.00	530,000.00	240,000.00
CA.04.01.01.03.01.01	Assegni di ricerca	Costo	720,000.00	530,000.00	240,000.00
CA.04.01.01.03.01.02	Contributi INPS per assegni di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.03.02	Collaboratori di ricerca	Costo	180,000.00	150,000.00	70,000.00
CA.04.01.01.03.02.01	Collaborazioni di ricerca	Costo	180,000.00	150,000.00	70,000.00
CA.04.01.01.03.02.02	Contributi obbligatori su collaborazioni di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.03.02.03	IRAP per collaborazioni di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.04	Docenti a contratto	Costo	10,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.01.01.04.01	Docenti a contratto	Costo	10,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.01.01.04.01.01	Personale docente a contratto	Costo	10,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.01.01.04.01.02	Contributi obbligatori sul personale docente a contratto	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.04.01.03	IRAP per personale docente a contratto	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05	Esperti linguistici	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01	Retribuzioni esperti linguistici a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.01	Assegni fissi collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.02	Contributi obbligatori collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.03	IRAP collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.04	Competenze accessorie collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.05	Contributi obbligatori su competenze accessorie collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.01.06	IRAP su competenze accessorie collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.02	Altre competenze collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.02.01	Altre competenze a collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.02.02	Contributi obbligatori su altre competenze collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.02.03	IRAP su altre competenze collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.03	Arretrati a collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.03.01	Arretrati a collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.03.02	Contributi obbligatori su arretrati a collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.03.03	IRAP su arretrati a collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.05.04	TFR collaboratori ed esperti linguistici di madre lingua a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.06	Altro personale dedicato alla ricerca e alla didattica di pubbliche amministrazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.06.01	Incarichi didattici a personale esterno di pubbliche amministrazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.06.01.01	Compensi per incarichi didattici a personale esterno di pubbliche amministrazioni	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.01.01.06.01.02	IRAP su compensi per incarichi didattici a personale esterno di pubbliche amministrazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.06.01.03	Contributi obbligatori su compensi per incarichi didattici a personale esterno di pubbliche amministrazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.07	Altri collaboratori per la didattica (did.integrativa, esercitatori e altro)	Costo	60,000.00	40,000.00	40,000.00
CA.04.01.01.07.01	Altri collaboratori per la didattica (did.integrativa,esercitatori e altro)- Competenze lorde	Costo	60,000.00	40,000.00	40,000.00
CA.04.01.01.07.02	Contributi obbligatori su altri collaboratori per la didattica (did. integrativa, esercitatori e altro)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.07.03	IRAP su altri collaboratori per la didattica (did. integrativa, esercitatori e altro)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.08	Collaboratori ed esperti linguistici a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.08.01	Assegni fissi per i collaboratori ed esperti linguistici a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.08.02	Contributi obbligatori su collaboratori ed esperti linguistici a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.01.08.03	IRAP su collaboratori ed esperti linguistici a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.02	ALTRI COSTI PERSONALE DOCENTE E RICERCATORE	Costo	755,000.00	481,000.00	322,000.00
CA.04.01.02.01	Missioni personale docente e ricercatore	Costo	700,000.00	450,000.00	300,000.00
CA.04.01.02.01.01	Missioni personale docente e ricercatore	Costo	450,000.00	300,000.00	200,000.00
CA.04.01.02.01.02	Missioni altro personale dedicato alla ricerca e alla didattica	Costo	250,000.00	150,000.00	100,000.00
CA.04.01.02.02	Rimborso forfettari su missioni del personale docente e ricercatore	Costo	5,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.01.02.02.01	Rimborsi forfettari su missioni del personale docente e ricercatore	Costo	5,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.01.02.02.02	Contributi obbligatori su rimborsi forfettari su missioni del personale docente e ricercatore	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.02.02.03	IRAP su rimborsi forfettari su missioni del personale docente e ricercatore	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.01.02.03	Iscrizione e partecipazione a congressi, corsi, convegni e altro, per il personale docente e ricercatore	Costo	20,000.00	6,000.00	7,000.00
CA.04.01.02.04	Ospitalità e visiting professor, esperti, relatori convegni e seminari	Costo	30,000.00	20,000.00	10,000.00
CA.04.02	COSTI DEL PERSONALE DIRIGENTE E TECNICO AMMINISTRATIVO	Costo	60,000.00	60,000.00	60,000.00
CA.04.02.01	PERSONALE DIRIGENTE E TECNICO-AMMINISTRATIVO	Costo	60,000.00	60,000.00	60,000.00
CA.04.02.01.01	Retribuzione Direttore Generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.01	Retribuzione Direttore Generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.01.01	Assegni fissi al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.01.02	Contributi obbligatori su assegni fissi al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.01.03	Contributi per indennità fine servizio su assegni fissi al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.01.04	IRAP su assegni fissi al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.02	Altre competenze al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.02.01	Altre competenze al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.02.02	Contributi obbligatori su altre competenze al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.02.03	IRAP su altre competenze al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.03	Arretrati al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.03.01	Arretrati al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.03.02	Contributi obbligatori su arretrati al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.03.03	Contributi per indennità fine servizio su arretrati al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.01.03.04	IRAP su arretrati al direttore generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02	Retribuzione dirigenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.01	Retribuzioni a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.02.01.02.01.01	Assegni fissi ai dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.01.02	Contributi obbligatori su assegni fissi ai dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.01.03	Contributi per indennità fine servizio su assegni fissi ai dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.01.04	IRAP su assegni fissi ai dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.02	Altre competenze a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.02.01	Altre competenze a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.02.02	Contributi obbligatori su altre competenze a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.02.03	IRAP su altre competenze a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.03	Arretrati a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.03.01	Arretrati a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.03.02	Contributi obbligatori su arretrati a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.03.03	Contributi per indennità fine servizio su arretrati a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.03.04	IRAP su arretrati a dirigenti a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.04	Trattamento accessorio personale DIRIGENTE	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.04.01	Fondo per il trattamento accessorio personale dirigente (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.04.02	Contributi obbligatori per il personale DIRIGENTE su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.04.03	Contributi per indennità fine servizio per i DIRIGENTI a tempo indeterminato su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.04.04	IRAP per il personale DIRIGENTE a tempo indeterminato su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.05	Retribuzioni a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.05.01	Assegni fissi ai dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.05.02	Contributi obbligatori su assegni fissi ai dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.05.03	Contributi per indennità fine servizio su assegni fissi ai dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.05.04	IRAP su assegni fissi ai dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.06	Altre competenze a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.06.01	Altre competenze a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.06.02	Contributi obbligatori su altre competenze a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.06.03	IRAP su altre competenze a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.07	Arretrati a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.07.01	Arretrati a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.07.02	Contributi obbligatori su arretrati a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.07.03	Contributi per indennità fine servizio su arretrati a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.02.07.04	IRAP su arretrati a dirigenti a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03	Retribuzione personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.03.01	Retribuzione personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.01.01	Assegni fissi al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.01.02	Contributi obbligatori su assegni fissi al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.01.03	Contributi per indennità fine servizio e TFR su assegni fissi al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.01.04	IRAP su assegni fissi al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.01.05	Contributi previdenza complementare su assegni fissi al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.02.01.03.02	Altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.02.01	Altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.02.02	Contributi obbligatori su altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.02.03	IRAP su altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.02.04	Contributi previdenza complementare su altre competenze al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.03	Competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato per attività commerciale	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.03.03.01	Competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato per attività commerciale	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.03.03.02	IRAP SU Competenze al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato per attività commerciale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04	Arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04.01	Arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04.02	Contributi obbligatori su arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04.03	Contributi per indennità fine servizio e TFR su arretrati al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04.04	IRAP su arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.03.04.05	Contributi previdenza complementare su arretrati al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04	Retribuzione personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.01	Retribuzioni al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.01.01	Retribuzioni al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.01.02	Contributi obbligatori su retribuzioni al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.01.03	Contributi per indennità TFR su retribuzioni al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.01.04	Irap su retribuzioni al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02	Altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.01	Lavoro straordinario personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.02	Altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.03	Contributi obbligatori su altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.04	IRAP su altre competenze al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.05	Contributi obbligatori su lavoro straordinario al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.02.06	IRAP su lavoro straordinario al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.03	Arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.03.01	Arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.03.02	Contributi obbligatori su arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.03.03	Contributi per indennità TFR su arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.04.03.04	IRAP su arretrati al personale tecnico amministrativo a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05	Trattamento accessorio personale tecnico amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01	Fondo per il trattamento accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01.01	Fondo per il trattamento accessorio (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01.02	Contributi obbligatori per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01.03	Contributi per indennità fine servizio per tecnico amministrativo a tempo indeterminato su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01.04	IRAP per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.01.05	Contributi previdenza complementare su fondo accessorio al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.02.01.05.02	Lavoro straordinario	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.02.01	Lavoro straordinario (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.02.02	Contributi obbligatori per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su lavoro straordinario	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.02.03	IRAP per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su lavoro straordinario	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.02.04	Contributi previdenza complementare su lavoro straordinario al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.03	Fondo comune d'Ateneo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.03.01	Fondo comune d'Ateneo (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.03.02	Contributi obbligatori per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su fondo comune	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.03.03	IRAP per il personale tecnico amministrativo a tempo indeterminato su fondo comune	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.03.04	Contributi previdenza complementare su fondo comune al personale tecnico-amministrativo a tempo indeterminato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04	Fondo per il trattamento accessorio personale cat. EP	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04.01	Fondo per il trattamento accessorio personale cat. EP (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04.02	Contributi obbligatori per il personale cat. EP su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04.03	Contributi per indennità fine servizio per personale cat. EP su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04.04	IRAP per il personale personale cat. EP su fondo accessorio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.05.04.05	Contributi previdenza complementare su fondo accessorio al personale cat EP	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.06	Altro personale tecnico amministrativo	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.06.01	Lavoratori socialmente utili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.06.01.01	Retribuzioni per lavoratori socialmente utili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.06.01.02	IRAP per lavoratori socialmente utili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.06.02	Collaborazioni coordinate continuative amministrative	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.06.02.01	Collaborazioni coordinate continuative amministrative	Costo	30,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.02.01.06.02.02	Contributi obbligatori per collaborazioni coordinate continuative amministrative	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.06.02.03	IRAP per collaborazioni coordinate continuative amministrative	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07	Personale Tecnico Amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.01	Integrazione stipendiale a personale tecnico amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.02	Contributi obbligatori su integrazione stipendiale a Personale Tecnico Amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.03	Contributi per indennità di fine servizio su integrazione stipendiale a personale tecnico amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.04	IRAP su integrazione stipendiale a Personale Tecnico Amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.05	Compensi accessori e libera professione a Personale Tecnico Amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.06	Contributi obbligatori su compensi accessori e libera professione a Personale Tecnico Amministrativo convenzionato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.02.01.07.07	IRAP su compensi accessori e libera professione a Personale Tecnico Amministrativo convenzionato in strutture sanitarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03	COSTI DELLA GESTIONE CORRENTE	Costo	2,627,180.00	2,137,630.00	1,712,750.00
CA.04.03.01	COSTI PER SOSTEGNO AGLI STUDENTI	Costo	1,115,000.00	1,127,000.00	842,000.00
CA.04.03.01.01	Dottorati di ricerca	Costo	180,000.00	240,000.00	160,000.00
CA.04.03.01.01.01	Dottorati di ricerca	Costo	180,000.00	240,000.00	160,000.00
CA.04.03.01.01.01.01	Borse di studio per dottorato di ricerca	Costo	180,000.00	240,000.00	160,000.00
CA.04.03.01.01.01.02	Contributi INPS su borse per dottorato di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.01.01.03	Mobilità dottorati di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.03.01.01.01.04	Contributi INPS su mobilità dottorati di ricerca	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02	Scuole di specializzazione	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02.01	Scuole di specializzazione	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02.01.01	Borse di studio per scuole di specializzazione mediche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02.01.02	Borse di studio per scuole di specializzazione non mediche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02.01.03	Contributi INPS su borse per scuole di specializzazione mediche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.02.01.04	Contributi INPS su borse per scuole di specializzazione non mediche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.03	Mobilità studenti	Costo	320,000.00	320,000.00	280,000.00
CA.04.03.01.03.01	Borse di studio per mobilità e scambi culturali	Costo	320,000.00	320,000.00	280,000.00
CA.04.03.01.03.02	IRAP su borse di studio per mobilità e scambi culturali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.04	Rimborsi tasse	Costo	5,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.01.04.01	Rimborsi tasse agli studenti	Costo	5,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.01.05	Altri interventi a favore degli studenti	Costo	610,000.00	565,000.00	400,000.00
CA.04.03.01.05.01	Borse di studio per post dottorato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.05.02	Borse di studio per perfezionamento all'estero	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.05.03	Altre borse di studio	Costo	610,000.00	565,000.00	400,000.00
CA.04.03.01.05.04	IRAP su Borse di studio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.01.05.05	Contributi obbligatori su Borse di studio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02	COSTI PER IL DIRITTO ALLO STUDIO	Costo	100,000.00	100,000.00	100,000.00
CA.04.03.02.01	Interventi per il diritto allo studio	Costo	100,000.00	100,000.00	100,000.00
CA.04.03.02.01.01	Attività part-time	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.02	Tutorato didattico	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.02.01.03	Spese di viaggio e soggiorno per mobilità e scambi culturali	Costo	80,000.00	80,000.00	80,000.00
CA.04.03.02.01.04	Oneri per servizi abitativi e ristorazione a favore degli studenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.05	Iniziative e attività culturali gestite da studenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.06	Oneri per interventi a favore degli studenti disabili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.07	Oneri per attività sportiva	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.08	Altri interventi a favore degli studenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.09	Partecipazione a fiere e convegni nazionali e internazionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.10	Contributi obbligatori Tutor	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.11	Contributi obbligatori su spese di viaggio e soggiorno per mobilità e scambi culturali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.12	IRAP su spese di viaggio e soggiorno per mobilità e scambi culturali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.13	IRAP su altri interventi a favore degli studenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.02.01.14	IRAP su Tutor	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.03	COSTI PER L'ATTIVITA' EDITORIALE	Costo	57,000.00	50,000.00	55,000.00
CA.04.03.03.01	Spese per attività editoriale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.03.01.01	Sostegno alla ricerca e all'attività editoriale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.03.02	Spese per pubblicazioni	Costo	22,000.00	20,000.00	25,000.00
CA.04.03.03.02.01	Spese per pubblicazioni	Costo	22,000.00	20,000.00	25,000.00

CA.04.03.03.03	Convegni	Costo	35,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.03.03.03.01	Relatori Convegni	Costo	35,000.00	30,000.00	30,000.00
CA.04.03.03.03.01.01	Compensi e rimborso spese convegni	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.03.03.01.02	Contributi obbligatori su compensi e rimborso spese convegni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.03.03.01.03	IRAP su compensi e rimborso spese convegni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.03.03.01.04	Organizzazione manifestazioni e convegni	Costo	15,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.03.03.04	Partecipazione ad eventi per la promozione della ricerca e del trasferimento tecnologico	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.04	TRASFERIMENTI A PARTNER DI PROGETTI COORDINATI	Costo	460,000.00	350,000.00	390,000.00
CA.04.03.04.01	Trasferimento quota partner progetti di ricerca e di didattica	Costo	400,000.00	290,000.00	330,000.00
CA.04.03.04.01.01	Trasferimento quota partner progetti di ricerca e di didattica	Costo	400,000.00	290,000.00	330,000.00
CA.04.03.04.02	Trasferimento fondi di ricerca/didattica non utilizzati	Costo	50,000.00	50,000.00	50,000.00
CA.04.03.04.02.01	Trasferimento fondi di ricerca/didattica non utilizzati	Costo	50,000.00	50,000.00	50,000.00
CA.04.03.04.03	Altri trasferimenti	Costo	10,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.03.05	ACQUISTO MATERIALE DI CONSUMO PER LABORATORI	Costo	110,280.00	75,130.00	60,250.00
CA.04.03.05.01	Acquisto materiale di consumo per laboratori	Costo	110,280.00	75,130.00	60,250.00
CA.04.03.05.01.01	Acquisto materiale di consumo per laboratori	Costo	110,280.00	75,130.00	60,250.00
CA.04.03.06	VARIAZIONI RIMANENZE DI MATERIALE DI CONSUMO PER LABORATORI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.06.01	Rimanenze iniziali materiale di consumo per laboratori	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.06.01.01	Rimanenze iniziali materiale di consumo per laboratori	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.07	ACQUISTO DI LIBRI, PERIODICI, MATERIALE BIBLIOGRAFICO	Costo	10,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.07.01	Pubblicazioni, stampe e guide	Costo	10,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.07.01.01	Periodici, giornali e riviste	Costo	10,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.07.01.02	Estratti, reprints e articoli scientifici	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.07.01.03	Libri e riviste in formato elettronico (e-books; e-journals)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08	ACQUISTO DI SERVIZI E COLLABORAZIONI TECNICO-GESTIONALI	Costo	627,500.00	395,500.00	225,500.00
CA.04.03.08.01	Acquisto di servizi	Costo	586,500.00	366,500.00	196,500.00
CA.04.03.08.01.01	Pubblicità obbligatoria	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.02	Pubblicità discrezionale	Costo	10,000.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.03	Spese postali e spedizioni	Costo	1,000.00	1,000.00	1,000.00
CA.04.03.08.01.04	Assicurazioni	Costo	70,000.00	70,000.00	40,000.00
CA.04.03.08.01.05	Spese per la promozione dell'Ateneo	Costo	20,000.00	10,000.00	10,000.00
CA.04.03.08.01.06	Assistenza informatica e manutenzione software	Costo	250,000.00	100,000.00	20,000.00
CA.04.03.08.01.07	Spese legali e patrocinio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.08	Smaltimento rifiuti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.09	Spese per servizi di stampa, legatoria e revisione articoli	Costo	10,000.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.10	Spesa corrente per brevetti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.11	Altre spese per servizi	Costo	210,000.00	180,000.00	120,000.00
CA.04.03.08.01.12	Servizio di accertamento veterinario stabulario	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.13	Spese per accertamenti sanitari	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.03.08.01.14	Spese per facility management	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.15	Spese per vestiario e biancheria	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.16	Spese per commissioni bancarie su bonifici esteri	Costo	500.00	500.00	500.00
CA.04.03.08.01.17	Spese di rappresentanza	Costo	15,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.03.08.01.18	Stime immobiliari, aggiornamenti e revisioni catastali, arbitrati	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.01.19	Prestazioni di servizio strumentali agli investimenti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02	Utenze e canoni	Costo	15,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.08.02.01	Utenze e canoni per telefonia fissa	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.02	Utenze e canoni per telefonia mobile	Costo	15,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.08.02.03	Utenze e canoni per reti di trasmissione	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.04	Utenze e canoni per energia elettrica	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.05	Utenze e canoni per acqua	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.06	Utenze e canoni per gas	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.07	Utenze e canoni di accesso a banche dati	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.02.08	Altre utenze e canoni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03	Manutenzione e gestione strutture	Costo	6,000.00	6,000.00	6,000.00
CA.04.03.08.03.01	Manutenzione ordinaria e riparazioni di immobili, pertinenze e impianti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03.02	Manutenzione ordinaria e riparazioni di attrezzature	Costo	3,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.08.03.03	Manutenzione ordinaria e riparazioni di automezzi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03.04	Altre spese di manutenzione ordinaria e riparazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03.05	Riscaldamento e condizionamento	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03.06	Servizi di traslochi e facchinaggio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.03.07	Manutenzione ordinaria e riparazioni su beni di terzi	Costo	3,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.08.04	Consulenze tecniche, amministrative e legali	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.08.04.01	Consulenze tecniche, amministrative e legali	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.08.04.01.01	Consulenze tecniche, amministrative e legali (competenze lorde)	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.08.04.01.02	Contributi obbligatori su consulenze tecniche, amministrative e legali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.08.04.01.03	IRAP su consulenze tecniche, amministrative e legali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.09	ACQUISTO ALTRI MATERIALI E BENI STRUMENTALI <€500	Costo	8,000.00	8,000.00	8,000.00
CA.04.03.09.01	Acquisto altri materiali	Costo	5,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.03.09.01.01	Carburanti, combustibili e lubrificanti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.09.01.02	Cancelleria e altro materiale di consumo	Costo	5,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.03.09.02	Acquisto beni strumentali < €500	Costo	3,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.09.02.01	Acquisto beni strumentali < €500	Costo	3,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.10	VARIAZIONI RIMANENZE DI MATERIALI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.10.01	Rimanenze iniziali materie di materiali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.10.01.01	Rimanenze iniziali materie di materiali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.11	COSTI PER IL GODIMENTO DI BENI DI TERZI	Costo	123,400.00	22,000.00	22,000.00
CA.04.03.11.01	Costi per il godimento di beni di terzi	Costo	123,400.00	22,000.00	22,000.00

CA.04.03.11.01.01	Licenze software	Costo	121,400.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.03.11.01.02	Noleggi e spese accessorie	Costo	2,000.00	2,000.00	2,000.00
CA.04.03.11.01.03	Leasing operativo ed altre forme di locazione di beni mobili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.11.01.04	Locazioni passive	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12	ALTRI COSTI	Costo	16,000.00	8,000.00	8,000.00
CA.04.03.12.01	Costi generali per attività istituzionali	Costo	11,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.03.12.01.01	Missioni e rimborsi spese trasferta organi istituzionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.01.02	Gettoni/indennità ai membri degli organi istituzionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.01.02.01	Gettoni/indennità ai membri degli organi istituzionali (competenze lorde)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.01.02.02	Contributi obbligatori su gettoni/indennità ai membri degli organi istituzionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.01.02.03	IRAP su gettoni/indennità ai membri degli organi istituzionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.01.03	Quote associative	Costo	11,000.00	5,000.00	5,000.00
CA.04.03.12.01.04	Altre spese per attività istituzionali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.02	Costi generali per il personale	Costo	5,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.12.02.02	Formazione del personale non docente - spese di iscrizione, partecipazione, frequenze a corsi o altro	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.02.03	Buoni pasto e servizio mensa	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.02.05	Missioni del personale tecnico amministrativo	Costo	5,000.00	3,000.00	3,000.00
CA.04.03.12.02.06	Interventi assistenziali a favore del personale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.02.07	Accertamenti sanitari resi necessari dall'attività lavorativa	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.02.08	Altri oneri per il personale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03	Compensi e rimborsi a commissari di concorso esterni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03.01	Compensi e rimborsi a commissari di concorso esterni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03.01.01	Compensi e rimborso spese a commissari di concorso esterni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03.01.02	Contributi obbligatori su compensi e rimborso spese a commissari di concorso esterni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03.01.03	IRAP su Compensi e rimborso spese a commissari di concorso esterni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.03.02	Rimborso a personale esterno per spese anticipate in nome e per conto	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.04	Rimborsi forfettari su missioni del personale tecnico amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.04.01	Rimborsi forfettari su missioni del personale tecnico-amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.04.02	Contributi obbligatori su rimborsi forfettari su missioni del personale tecnico amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.03.12.04.03	IRAP su rimborsi forfettari su missioni del personale tecnico amministrativo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04	AMMORTAMENTI E SVALUTAZIONI	Costo	347,000.00	294,000.00	113,000.00
CA.04.04.01	AMMORTAMENTI E SVALUTAZIONI	Costo	347,000.00	294,000.00	113,000.00
CA.04.04.01.01	Ammortamenti immobilizzazioni immateriali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.01	Ammortamento costi di impianto, di ampliamento e di sviluppo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.01.01	Ammortamento costi di impianto, di ampliamento e di sviluppo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.01.A01	Ammortamento costi di impianto, di ampliamento e di sviluppo (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.02	Ammortamento diritti di brevetto e diritti di utilizzazione delle opere di ingegno	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.02.01	Ammortamento software acquistato a titolo di proprietà	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.02.02	Ammortamento concessioni, licenze, marchi, e diritti simili	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.04.01.01.02.A01	Ammortamento software acquistato a titolo di proprietà (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.02.A02	Ammortamento concessioni, licenze, marchi, e diritti simili (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.03	Ammortamento altre immobilizzazioni immateriali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.04	Ammortamento interventi straordinari su beni di terzi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.01.A03	Ammortamento altre immobilizzazioni immateriali (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02	Ammortamenti immobilizzazioni materiali	Costo	347,000.00	294,000.00	113,000.00
CA.04.04.01.02.01	Ammortamento terreni e fabbricati	Costo	50,000.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.01	Ammortamento fabbricati	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.02	Ammortamento costruzioni leggere (costr. Temporanee, tendoni, ecc..)	Costo	50,000.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.03	Ammortamento fabbricati di valore artistico e culturale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.A01	Ammortamento fabbricati (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.A02	Ammortamento costruzioni leggere (costr. Temporanee, tendoni, ecc..) (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.01.A03	Ammortamento fabbricati di valore artistico e culturale (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02	Ammortamento impianti e attrezzature	Costo	248,000.00	248,000.00	72,000.00
CA.04.04.01.02.02.01	Ammortamento impianti generici	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.02	Ammortamento impianti specifici	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.03	Ammortamento attrezzature informatiche, audio video ed elettriche	Costo	248,000.00	248,000.00	72,000.00
CA.04.04.01.02.02.04	Ammortamento altre attrezzature non scientifiche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.A01	Ammortamento impianti generici (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.A02	Ammortamento impianti specifici (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.A03	Ammortamento attrezzature informatiche, audio video ed elettriche (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.02.A04	Ammortamento altre attrezzature non scientifiche (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.03	Ammortamento attrezzature scientifiche	Costo	20,000.00	20,000.00	20,000.00
CA.04.04.01.02.03.01	Ammortamento attrezzature scientifiche per laboratori	Costo	16,000.00	16,000.00	16,000.00
CA.04.04.01.02.03.02	Ammortamento altre attrezzature scientifiche	Costo	4,000.00	4,000.00	4,000.00
CA.04.04.01.02.03.A01	Ammortamento attrezzature scientifiche per laboratori (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.03.A02	Ammortamento altre attrezzature scientifiche (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.04	Ammortamento patrimonio librario, opere d'arte, d'antiquariato e museali	Costo	20,000.00	20,000.00	15,000.00
CA.04.04.01.02.04.01	Ammortamento libri, opere d'arte, d'antiquariato e museali	Costo	20,000.00	20,000.00	15,000.00
CA.04.04.01.02.04.A01	Ammortamento libri, opere d'arte, d'antiquariato e museali (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.05	Ammortamento mobili e arredi	Costo	9,000.00	6,000.00	6,000.00
CA.04.04.01.02.05.01	Ammortamento mobili ed arredi	Costo	9,000.00	6,000.00	6,000.00
CA.04.04.01.02.05.A01	Ammortamento mobili (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.05.A02	Ammortamento arredi e complementi (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.06	Ammortamento altre immobilizzazioni materiali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.06.01	Ammortamento autocarri, motoveicoli e simili	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.06.02	Ammortamento autovetture da trasporto	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.06.03	Ammortamento altre immobilizzazioni materiali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.02.06.A01	Ammortamento autocarri, motoveicoli e simili (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.04.01.02.06.A02	Ammortamento autoveicoli da trasporto (anni precedenti)	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.03	Svalutazioni immobilizzazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.04.01.04	Svalutazioni dei crediti compresi nell'attivo circolante e delle disponibilità liquide	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05	ACCANTONAMENTI PER RISCHI E ONERI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01	ACCANTONAMENTI PER RISCHI E ONERI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01	Accantonamento a fondo rischi ed oneri	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.01	Accantonamento a fondo rischi attività c/terzi e finanziamenti progetti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.02	Accantonamento a fondo per imposte	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.03	Accantonamento a fondo contenziosi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.04	Accantonamento a fondo per l'incrementazione di attività di ricerca con economie derivanti dalla concessione di congedi a docenti e ricercatori	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.05	Accantonamento a fondo accessorio dirigenti, cat. EP, B, C, D	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.06	Accantonamento a fondo ricostruzioni di carriera	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.07	Accantonamento a fondo ricercatori a tempo determinato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.08	Accantonamento a fondo lavoro straordinario	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.09	Accantonamento a fondo comune d'Ateneo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.10	Accantonamento a fondo congedi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.11	Accantonamento a Fondo progressioni economiche orizzontali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.12	Accantonamento a Fondo Indennità di risultato Direttore Generale	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.13	Accantonamento a fondo rischi su crediti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.14	Accantonamento per TFR CEL	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.15	Accantonamento a fondo incentivante art.92 Dlgs 163/2006 ex art.18 - L.109/1994	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.16	Accantonamento fondo rapporti insoluti con ASL	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.17	Accantonamento per ferie non godute	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.18	Accantonamento per contenziosi con personale dell'Ateneo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.19	Accantonamento a fondo manutenzioni cicliche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.05.01.01.20	Accantonamento per sistemazioni previdenziali L.23/86 e interessi previdenziali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06	ONERI DIVERSI DI GESTIONE	Costo	7,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01	TRIBUTI	Costo	2,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.02	Valori bollati	Costo	1,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.02.01	Valori bollati	Costo	1,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.03	Altri tributi	Costo	1,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.03.01	Altri tributi	Costo	1,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.04	IVA indetraibile da prorata	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.01.04.01	IVA indetraibile da prorata	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.02	RESTITUZIONI E RIMBORSI	Costo	5,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.02.01	Restituzioni e rimborsi	Costo	5,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.02.01.01	Restituzioni e rimborsi diversi	Costo	5,000.00	0.00	0.00
CA.04.06.02.01.02	Rimborsi spese per personale comandato	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.02.01.03	Rimborsi allo Stato	Costo	0.00	0.00	0.00

CA.04.06.03	ALTRI ONERI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01	Altri oneri	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.01	Oneri da contenzioso e sentenze sfavorevoli	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.02	Perdite su crediti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.03	Arrotondamenti passivi e abbuoni passivi e altri oneri di gestione	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.04	Spese e commissioni bancarie e postali	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.05	Minusvalenze ordinarie da alienazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.04.06.03.01.09	Oneri per la sicurezza	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05	PROVENTI ED ONERI FINANZIARI		0.00	0.00	0.00
CA.05.01	PROVENTI FINANZIARI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.01.01	PROVENTI FINANZIARI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.01.01.01	Proventi finanziari	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.01.01.01.01	Interessi attivi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.01.01.01.02	Mora su iscrizioni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02	INTERESSI ED ALTRI ONERI FINANZIARI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.01	INTERESSI PASSIVI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.01.01	Interessi passivi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.01.01.01	Interessi passivi e oneri finanziari vs banche	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.01.01.02	Interessi passivi verso fornitori	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.02	ALTRI ONERI FINANZIARI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.02.02.02	Altri oneri finanziari	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.03	UTILI E PERDITE SU CAMBI		0.00	0.00	0.00
CA.05.03.01	UTILI SU CAMBI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.03.01.01	Utili su cambi	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.05.03.02	PERDITE SU CAMBI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.05.03.02.01	Perdite su cambi	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.06	RETTIFICHE DI VALORE DI ATTIVITA' FINANZIARIE		0.00	0.00	0.00
CA.06.01	RIVALUTAZIONI DI ATTIVITA' FINANZIARIE	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.06.01.01	RIVALUTAZIONI DI ATTIVITA' FINANZIARIE	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.06.01.01.01	Rivalutazioni di attività finanziarie	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.06.01.01.02	Rivalutazioni cespiti	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.06.02	SVALUTAZIONI DI ATTIVITA' FINANZIARIE	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.06.02.01	SVALUTAZIONI DI ATTIVITA' FINANZIARIE	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.06.02.01.01	Svalutazioni di attività finanziarie	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.06.02.01.02	Svalutazioni cespiti	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.07	PROVENTI ED ONERI STRAORDINARI		0.00	0.00	0.00
CA.07.01	PROVENTI STRAORDINARI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.07.01.01	PROVENTI STRAORDINARI	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.07.01.01.01	Donazioni e lasciti	Ricavo	0.00	0.00	0.00

CA.07.01.01.02	Altri proventi straordinari	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.07.01.01.03	Sopravvenienze e insussistenze attive	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.07.01.01.04	Plusvalenze straordinarie da alienazioni	Ricavo	0.00	0.00	0.00
CA.08	ONERI STRAORDINARI		0.00	0.00	0.00
CA.08.01	ONERI STRAORDINARI	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.08.01.01	Altri oneri straordinari	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.08.01.01.01	Altri oneri straordinari	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.08.01.01.02	Sopravvenienze e insussistenze passive	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.08.01.01.03	Minusvalenze straordinarie da alienazioni	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09	IMPOSTE SUL REDDITO DELL'ESERCIZIO CORRENTI, DIFFERITE, ANTICIPATE		0.00	0.00	0.00
CA.09.01	IRES	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.01.01	IRES	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.01.01.01	Ires	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.02	IRAP	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.02.01	IRAP	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.02.01.01	Irap	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03	Imposte diverse	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03.01	Imposte diverse	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03.01.01	Imposte sul patrimonio	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03.01.02	Imposta di registro	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03.01.03	Imposta di bollo	Costo	0.00	0.00	0.00
CA.09.03.01.04	Altre imposte e tasse	Costo	0.00	0.00	0.00

DIFFERENZA TRA RICAVI E COSTI	-361,400.00	0.00	0.00
--------------------------------------	--------------------	-------------	-------------

6.1 Richiesta selezione pubblica per il conferimento di n. 1 incarico di collaborazione nell'ambito del Progetto ECSEL JU AIDOaRt – prof. Vittorio Cortellessa

Il prof. Vittorio Cortellessa, con nota acquisita al prot. n. 5061 del 10 novembre 2022, ha richiesto l'emissione di un bando per soli titoli per l'assegnazione di un incarico di lavoro autonomo di collaborazione per il Progetto europeo **ECSEL JU AIDOaRt** per lo svolgimento della seguente attività "Coordinamento e progettazione delle attività di sviluppo di un framework basato su modelli per il continuo sviluppo di Cyber-Physical Systems".

Sono previste le seguenti specifiche attività:

- a) Fornire supporto per il coordinamento scientifico e la gestione delle attività di progetto. In particolare, coordinare le attività tecniche e scientifiche delineate nel piano di lavoro del progetto e la comunicazione tra i partner del consorzio per consolidare gli input nella pianificazione del progetto, monitoraggio dei progressi e obiettivi tecnici; supervisionare l'organizzazione dei contributi scientifici.
- b) Progettazione di un framework basato su modelli per supportare il processo di continuo sviluppo (DevOps) di Cyber-Physical Systems (CPS) beneficiando di tecniche di Model-Driven Engineering.

Requisiti necessari per la partecipazione alla selezione: Dottorato di ricerca in Informatica o titolo equivalente.

Comprovata esperienza di almeno 10 anni di attività di ricerca in materia di Software engineering, Model-Driven Engineering

È richiesta altresì comprovata esperienza di almeno 5 anni di partecipazione e direzione di attività in progetti di ricerca nazionali e internazionali.

La selezione avverrà sulla base del curriculum e dei titoli posseduti.

La procedura comparativa dovrà valutare curriculum e titoli posseduti valutando i seguenti elementi:

- qualificazione professionale;
- esperienze già maturate nel settore di attività di riferimento;
- altri titoli pertinenti con l'oggetto della collaborazione.

La collaborazione avrà la durata di n. 6 mesi e un impegno complessivo stimato di 500 ore.

Il compenso previsto per l'incarico ammonta ad euro 15.000,00 per una spesa massima complessiva presunta di euro 19.950,00 che graverà sul Progetto 04UE.AIDOART coordinato dal prof. Vittorio Cortellessa sulla COAN CA. 04.01.01.03 – Altro personale dedicato alla ricerca, che presenta la necessaria copertura.

Detti importi sono da intendersi al 50% qualora il vincitore del bando fosse dipendente dall'Ateneo dell'Aquila, come previsto dai vigenti regolamenti.

Il prof. Vittorio Cortellessa verificherà il corretto svolgimento dell'incarico mediante verifica della coerenza dei risultati conseguiti rispetto agli obiettivi affidati al collaboratore ai fini della corresponsione del relativo compenso.

- 6.1 Richiesta selezione pubblica per il conferimento di n. 1 incarico di collaborazione nell'ambito del Progetto ECSEL JU AIDoArt – prof. Vittorio Cortellessa

La Commissione esaminatrice proposta dal Responsabile scientifico è la seguente:

Prof. Vittorio Cortellessa (Presidente)

Dott. Luigi Pomante (Membro)

Dott.ssa Tania Di Mascio (Segretario)

Il Consiglio,

- VISTO** l'art. 7 comma 6 del D.Lgs n. 165 del 30.03.2001 e successive modifiche e integrazioni;
- VISTO** il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila;
- VISTO** il vigente Regolamento per l'Amministrazione, la Finanza e la Contabilità;
- VISTO** il Regolamento di Ateneo in materia di disciplina degli incarichi conferiti dall'Università degli Studi dell'Aquila al proprio personale tecnico-amministrativo emanato con D.R. n. 3823 del 16.12.2008 e riformulato con D.R. n. 158 del 31.03.2017;
- VISTA** la richiesta del prof. Vittorio Cortellessa di attivare una procedura selettiva per l'affidamento di n. 1 incarico retribuito dal titolo "Coordinamento e progettazione delle attività di sviluppo di un framework basato su modelli per il continuo sviluppo di Cyber-Physical Systems" nell'ambito del Progetto **AIDoART**, codice progetto 04UE.AIDoART di cui è Responsabile scientifico
- RITENUTI** idonei i requisiti richiesti;
- ACCERTATA** la copertura finanziaria;

all'unanimità/a maggioranza

1. **APPROVA** la richiesta del prof. Vittorio Cortellessa
2. **APPROVA** la Commissione Esaminatrice della selezione come proposta dal richiedente.
3. **AUTORIZZA** l'emanazione del bando di selezione interna per attivare una procedura selettiva, riservata al personale a tempo indeterminato ed ai Collaboratori ed esperti linguistici dell'Università degli Studi dell'Aquila, per l'affidamento di n. 1 incarico di collaborazione, da svolgersi presso il DISIM, sul Progetto **AIDoART** dal titolo: "Coordinamento e progettazione delle attività di sviluppo di un framework basato su modelli per il continuo sviluppo di Cyber-Physical Systems", della durata di 6 mesi per un monte ore previsto di n. 500 ed un compenso di euro 7.500,00 oltre oneri a carico Ente, a valere sul Progetto 04UE.AIDoART

qualora tale bando di selezione interna andasse deserto

4. **AUTORIZZA** l'emanazione del bando di selezione pubblica per l'affidamento di n. 1 incarico di collaborazione, da svolgersi presso il DISIM, sul Progetto **AIDoART** dal titolo: "Coordinamento e progettazione delle attività di sviluppo di un framework basato su modelli per il continuo sviluppo di Cyber-Physical Systems", della durata di 6 mesi per un monte ore previsto di n. 500 ed un compenso di euro 15.000,00 oltre oneri a carico Ente, a valere sul Progetto 04UE.AIDoART

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

6.2 Richiesta risoluzione contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica - dott.ssa Teresa Scarinci – decorrenza 27.10.2022 – ratifica

Il Presidente informa che, come preannunciato nell'ultima seduta del Consiglio, è pervenuta la nota del Rettore, acquisita al prot. n. 4780 del 24 ottobre 2022, nella quale si riporta che la dott.ssa Teresa Scarinci, Ricercatrice a tempo determinato lett. a) per il S.C. 01/A3 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica, S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica per il periodo dal 01.06.2020 – 31.05.2023, ha comunicato la propria volontà di risoluzione del contratto di lavoro subordinato a decorrere dal 27.10.2022.

Trattandosi di rapporto di lavoro a tempo determinato che può concludersi prima della data di scadenza solo in caso di accordo di entrambe le parti, è stato richiesto il nulla osta alla risoluzione.

Il Presidente ricorda che la richiesta è stata presentata poiché la dott.ssa Scarinci è risultata vincitrice di una procedura per la selezione di una Ricercatrice a Tempo Determinato lett. b) per il S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica presso l'Università di Cassino. Stante la prevista incombenza sui tempi ristretti rispetto alla successiva presa di servizio, il Direttore ha quindi proceduto in autonomia ad effettuare una serie di verifiche. In particolare, ha verificato con l'area di riferimento che le coperture didattiche attribuite alla dott.ssa Scarinci saranno garantite senza ulteriori oneri per l'Ateneo da parte dei colleghi di area. Inoltre, ha verificato che la dott.ssa Scarinci non è stata indicata quale docente di riferimento per l'a.a. 2022/2023. Infine, il Direttore ha confermato che durante il periodo di permanenza presso il DISIM la dott.ssa Scarinci ha adempiuto con disciplina e onore ai propri obblighi didattici, di ricerca e di servizio agli studenti.

Pertanto, con propria nota prot. 4801 del 26.10.2022, il Direttore ha inviato il proprio parere che nulla ostava ad accogliere la richiesta di risoluzione del contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica presentata dalla dott.ssa Teresa Scarinci con decorrenza 27.10.2022. Tale parere viene oggi sottoposto a ratifica del Consiglio.

Il Consiglio,

- VISTA** la Legge 30.12.2010, n. 240 ed in particolare l'art. 24
- VISTO** lo Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila, emanato con D.R. n. 50 del 12.01.2012
- VISTO** il vigente Regolamento di Ateneo per l'assunzione di Ricercatori universitari a Tempo Determinato, emanato con D.R. n. 621 del 05.04.2012 e successive modificazioni
- VISTO** il contratto Repertorio n. 162/2020 prot. n. 44759 del 04.06.2020 con il quale la dott.ssa Teresa Scarinci è stata assunta per un triennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica per il periodo dal 01/06/2020 – 31/05/2023
- VISTA** la nota del Rettore, acquisita al prot. n. 4780 del 24 ottobre 2022, nella quale si riporta che la dott.ssa Teresa Scarinci, Ricercatrice a tempo determinato lett. a) per il S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica, ha comunicato la propria volontà di risoluzione del contratto di lavoro subordinato a decorrere dal 27.10.2022
- VISTA** la nota del Direttore prot. 4801 del 26.10.2022 con la quale ha espresso il proprio nulla osta ad accogliere la richiesta di risoluzione del contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica presentata dalla dott.ssa Teresa Scarinci con decorrenza 27.10.2022

- 6.2 Richiesta risoluzione contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica - dott.ssa Teresa Scarinci – decorrenza 27.10.2022 – ratifica

all'unanimità / a maggioranza

ratifica il nulla osta alla risoluzione del contratto di lavoro subordinato Repertorio n. 162/2020 prot. n. 44759 del 04.06.2020 stipulato con la dott.ssa Teresa Scarinci con il quale è stata assunta per un triennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. MAT/05 – Analisi matematica, a decorrere dal **27.10.2022**.

- 6.3 Richiesta anticipo risoluzione contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. INF/01 – Informatica dott.ssa Romina Eramo – decorrenza 28.10.2022 – ratifica

Il Presidente ricorda che il Consiglio DISIM, con propria delibera n. 272/2022, prot. 4586 del 12.10.2022, ha espresso parere favorevole alla risoluzione del contratto di lavoro subordinato Repertorio n. 384/2021 prot. n. 103277 del 08.09.2021 stipulato con la dott.ssa Romina Eramo con il quale è stata prorogata per un biennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. INF/01 - Informatica, a decorrere dal 30.11.2022.

Successivamente la dott.ssa Romina Eramo ha inviato una ulteriore nota, acquisita al protocollo DISIM al n. 4851 del 27.10.2022, con la quale chiedeva di poter anticipare la risoluzione del contratto in essere in quanto chiamata a prendere servizio in qualità di Ricercatore a Tempo Determinato di tipo b) presso L'Università degli Studi di Teramo, a decorrere dalla data del 28/10/2022.

Il Direttore, con nota prot. n. 4854 del 27.10.2022, stanti le motivazioni soggiacenti, ha espresso parere favorevole all'anticipo della risoluzione del contratto, e tale parere viene oggi sottoposto a ratifica del Consiglio.

Il Consiglio,

- VISTA** la Legge 30.12.2010, n. 240 ed in particolare l'art. 24
- VISTO** lo Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila, emanato con D.R. n. 50 del 12.01.2012
- VISTO** il vigente Regolamento di Ateneo per l'assunzione di Ricercatori universitari a Tempo Determinato, emanato con D.R. n. 621 del 05.04.2012 e successive modificazioni
- VISTO** il contratto Repertorio n. 384/2021 prot. n. 103277 del 08.09.2021 con il quale la dott.ssa Romina Eramo è stata prorogata per un biennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. INF/01 - Informatica per il periodo dal 03.09.2021 al 02.09.2023
- VISTA** la propria delibera n. 272/2022, prot. 4586 del 12.10.2022, ha espresso parere favorevole alla risoluzione del contratto di lavoro subordinato Repertorio n. 384/2021 prot. n. 103277 del 08.09.2021 stipulato con la dott.ssa Romina Eramo con il quale è stata prorogata per un biennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. INF/01 - Informatica, a decorrere dal 30.11.2022
- VISTA** la nota della dott.ssa Eramo nota, acquisita al protocollo DISIM al n. 4851 del 27.10.2022, con la quale chiedeva di poter anticipare la risoluzione del contratto in essere in quanto doveva di prendere servizio in qualità di Ricercatore a Tempo Determinato di tipo b) presso L'Università degli Studi di Teramo, a decorrere dalla data del 28/10/2022
- VISTA** nota del Direttore prot. 4854 del 27.10.2022 con la quale ha espresso il proprio nulla osta ad accogliere la richiesta di risoluzione anticipata del contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) presentata dalla dott.ssa Romina Eramo, a decorrere dal 28.10.2022

all'unanimità / a maggioranza

ratifica il parere favorevole di risoluzione del contratto di lavoro subordinato Repertorio n. 384/2021 prot. n. 103277 del 08.09.2021 stipulato con la dott.ssa Romina Eramo con il quale è stata prorogata per un

6.3 Richiesta anticipo risoluzione contratto di lavoro di Ricercatrice a Tempo Determinato lett. a) S.S.D. INF/01 – Informatica dott.ssa Romina Eramo – decorrenza 28.10.2022 – ratifica

biennio in qualità di Ricercatrice universitaria a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3 lett. a) della L. 240/2010, per il S.S.D. INF/01 - Informatica, a decorrere dal **28.10.2022**.

- 6.4 Approvazione relazione tecnico-scientifica secondo anno (01.10.2021 – 31.09.2022) dott. Antonio Cicone

Il Presidente dà lettura della relazione scientifica inviata dal dott. Antonio Cicone per il periodo 01.10.2021 – 30.09.2022 che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

VISTO il Regolamento Generale del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica emanato con D.R. 1923 del 07.08.2012

VISTO il vigente Regolamento per l'assunzione di Ricercatori universitari a tempo determinato (emanato con D.R. n. 621/2012 del 05.04.2012) ed in particolare l'art. 12

SENTITA la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Antonio Cicone

PRESO ATTO della verifica da parte del Direttore dello svolgimento delle attività didattiche, didattico integrative e di servizio verso gli studenti da parte del dott. Antonio Cicone

all'unanimità/a maggioranza

approva la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Antonio Cicone inerente il secondo anno di attività (01.10.2021 – 30.09.2022).

Relazione tecnico-scientifica II anno R.t.d. B

Antonio Cicone

Periodo di riferimento: 01 ottobre 2021 – 30 settembre 2022

1 Attività di ricerca

1.1 Sviluppo ed analisi matematica di nuove tecniche di analisi di segnali

Sul fronte dello sviluppo di nuove tecniche e loro analisi, nel periodo in questione:

- Insieme ai colleghi del Georgia Tech Haomin Zhou e Wing S. Li, abbiamo completato l'analisi numerica della tecnica di analisi in tempo-frequenza di segnali non-stazionari chiamata IMFogramma e scritto un articolo intitolato “New theoretical insights in the decomposition and time-frequency representation of nonstationary signals: the IMFogram algorithm” che abbiamo inviato a rivista nei mesi scorsi.
- Con Giovanni Barbarino, postdoc presso l'Università di Aalto in Finlandia, dopo esserci occupati della revisione e pubblicazione del lavoro intitolato “Conjectures on spectral properties of ALIF algorithm” nella rivista *Linear Algebra and its Applications*, ci siamo occupati dell'analisi di convergenza del metodo Adaptive Local Iterative Filtering per l'analisi di segnali altamente non-stazionari e dello sviluppo di una tecnica innovativa chiamata (Fast) Resampled Iterative Filtering che consente di superare tutta una serie di limiti che le tecniche iterative hanno dimostrato di avere nell'analisi di segnali altamente non-stazionari. Si è scritto un articolo intitolato “Stabilization and Variations to the Adaptive Local Iterative Filtering Algorithm: the Fast Resampled Iterative Filtering Method” che abbiamo inviato a rivista nei mesi scorsi.
- Con Haomin Zhou del Georgia Tech di Atlanta e Stefano Serra-Capizzano dell'Università dell'Insubria abbiamo analizzato le capacità della tecnica Iterative Filtering di separare due componenti con frequenze molto vicine tra di loro, mettendola a confronto con le performance di tecniche alternative sviluppate finora in letteratura. Si è scritto un articolo intitolato “One or two frequencies? The Iterative Filtering answers” che abbiamo inviato a rivista nei mesi scorsi.
- Con i colleghi dell'Università di Bologna, Serena Morigi e Martin Huska, e con Sung Ha Kang del Georgia Tech, dopo aver pubblicato il lavoro intitolato “JOT: a Variational Signal Decomposition into Jump, Oscillation and Trend” nella prestigiosa rivista *IEEE Transactions on Signal Processing*, abbiamo lavorato ad un articolo che presentasse i dettagli dell'algoritmo sviluppato nel precedente lavoro. Abbiamo da poco inviato il risultato del nostro lavoro alla rivista *Image Processing On Line* con un lavoro intitolato “A two-stage signal decomposition into Jump, Oscillation and Trend using ADMM”.

Riguardo alle attività in corso, sto attualmente lavorando su una serie di problemi aperti nel settore della matematica per l'analisi dei segnali.

- In primis, con Enza Pellegrino del DIIE, dopo aver pubblicato il lavoro “Multivariate Fast Iterative Filtering for the decomposition of nonstationary signals” nella prestigiosa rivista *IEEE Transactions on Signal Processing*, stiamo completando l'estensione della tecnica Iterative Filtering al caso di dati al contempo multidimensionali e multivariati.

- Insieme a Haomin Zhou, Wing S. Li, Edward J. Timko del Georgia Tech e Roberto Cavassi, stiamo lavorando all'estensione delle tecniche di scomposizione di segnali a dati definiti sulla sfera sia nel continuo che nel discreto e all'analisi numerica ed accelerazione di queste tecniche.
- Con Sung Ha Kang e Guangyu Cui del Georgia Tech, USA, stiamo lavorando ad un approccio innovativo per l'individuazione di pattern all'interno di segnali nonstazionari.
- Insieme a Haomin Zhou del Georgia Tech, USA, e Feng Zhou della cinese Guangdong University of Finance and Economics, stiamo lavorando allo sviluppo di tecniche di scomposizione di segnali nonstazionari basate sul machine learning. Abbiamo recentemente ultimato un primo lavoro intitolato "RRCNN: A novel signal decomposition approach based on recurrent residue convolutional neural network" che abbiamo da poco inviato a rivista.

1.2 Applicazioni

Sul fronte delle applicazioni nell'ultimo anno:

- Insieme ai colleghi dell'INGV si è lavorato a sviluppare e analizzare un nuovo approccio per l'analisi della causalità sui dati reali. Si sono scritti due articoli. Il primo intitolato "Intrinsic Mode Cross Correlation: a novel technique to identify scale-dependent lags between two signals and its application to ionospheric science" che è stato pubblicato nella prestigiosa rivista *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. Il secondo, intitolato "Multi-scale response of the high-latitude topside ionosphere to geospace forcing" è stato accettato sulla rivista *Advances in Space Research*. Sempre con i colleghi dell'INGV ho lavorato come responsabile scientifico del progetto VIP-SWARM dell'ESA, che ha come obiettivo l'analisi e lo sviluppo di modelli predittivi del comportamento della ionosfera. Nell'ultimo anno abbiamo sviluppato un modello previsionale e lo abbiamo pubblicato in un lavoro intitolato "Variability of Ionospheric Plasma: Results from the ESA Swarm Mission" apparso da poco nella prestigiosa rivista *Space Science Reviews*.
- Con i colleghi dell'INAF abbiamo analizzato l'accoppiamento ionosfera-magnetosfera tramite i dati di campo magnetico ed elettrico del satellite CSES-01, della missione congiunta italo-cinese CSES, e abbiamo pubblicato un lavoro intitolato "On the magnetosphere-ionosphere coupling during the May 2021 Geomagnetic storm" sull'importante rivista *Space Weather*.
- Insieme a Stefano Sfarra del DIIE ed altri nostri colleghi, abbiamo completato il lavoro di revisione dell'articolo intitolato "Maximizing the detection of thermal imprints in civil engineering composites via numerical and thermographic results pre-processed by a groundbreaking mathematical approach" che è stato pubblicato nella prestigiosa rivista *International Journal of Thermal Sciences*.
- Con i ricercatori dell'Istituto di Micromeccanica and Fotonica dell'Università di Tecnologia di Varsavia, dopo aver pubblicato l'articolo intitolato "Tailoring 2D Fast Iterative Filtering algorithm for low-contrast optical fringe pattern preprocessing" nella prestigiosa rivista *Optics and Lasers in Engineering*, si è lavorato ad un articolo a conferenza intitolato "Applying an iterative filtering method for optical fringe patterns preprocessing" pubblicato nei proceedings *Optics InfoBase Conference Papers*.
- Con Stefano Serra-Capizzano dell'Università dell'Insubria e alcuni colleghi iraniani si è lavorato ad un articolo intitolato "Recognizing seizure using Poincaré plot of EEG signals and Graphical features in DWT domain" pubblicato nella rivista *Bratislava Medical Journal*.

Come attività attualmente in corso:

- Insieme ai colleghi dell'INGV e i colleghi del Boston College stiamo lavorando all'analisi di simulazioni di plasma bubble tramite tecniche di signal processing con l'obiettivo di individuare in modo più accurato le proprietà fisiche delle plasma bubble a varie altitudini dal suolo.

- Con i colleghi dell'INAF sto collaborando attivamente allo sviluppo di tecniche innovative per l'analisi di dati di campo magnetico ed elettrico terrestre con l'obiettivo di identificare possibili fenomeni co-sismici e potenzialmente anche precursori sismici. L'INAF fa parte di un progetto italo-cinese per lo sviluppo, messa in orbita ed analisi di dati di campo magnetico terrestre denominato CSES.
- Con i colleghi dell'European Gravitational Observatory di Pisa abbiamo da poco iniziato a lavorare all'utilizzo di tecniche avanzate di analisi dei segnali sui dati di VIRGO con l'obiettivo di migliorare la capacità di identificazione e analisi di onde gravitazionali.

2 Didattica, didattica integrativa e servizio agli studenti

Durante il secondo anno come R.t.d. B presso il DISIM ho svolto le seguenti attività di didattica, didattica integrativa e servizio agli studenti:

- Ho insegnato 3 cfu del corso “Parallel Computing” per il corso di laurea magistrale in Ingegneria Matematica.
- Ho insegnato 3 cfu del corso “Numerical Methods For Linear Algebra And Optimisation” per il corso di laurea magistrale in Ingegneria Matematica.
- Ho insegnato 3 cfu del corso “Introduction to MATLAB” per il Pre-Master’s Foundation Programme in Applied Mathematics.
- Sono stato relatore della tesi di laurea magistrale in Ingegneria Matematica di Godfred Agyemang, che si è laureato a dicembre 2021 con una tesi dal titolo “Study of Resonance effects in non-homogeneous linear differential equations” e Rayaul mbouo Nimpa che si è laureato a marzo 2022 con una tesi dal titolo “Principal component analysis and multivariate iterative filtering technique: a comparison”. Sono stato anche relatore della tesi di laurea magistrale in Mathematical Modelling di Stephen Naboth, che si è laureato a settembre 2022 con una tesi dal titolo “A new approach for automatic defect detection via thermal image processing and deep learning tools”, correlatore Prof. Stefano Sfarra del DIIE.
- Sto attualmente supervisionando il lavoro di tesi di laurea magistrale in Ingegneria Matematica di Charles Kankam Boateng, Sofiia Prokofieva, Seyi James Popoola, Ebenezer Danso Effah, Monsuru Olarewaju Moshood, Sodiq Sunday Folorunsho e Reagan Kasonsa Tshiangomba.
- Da novembre 2021 sono supervisore scientifico del dottorando Muhammad Hammad Malik, iscritto al Dottorato di Ricerca in Informatica e Matematica del Calcolo - XXXVII ciclo, dell'Università degli Studi dell'Insubria.
- Da gennaio 2022 sono supervisore scientifico del dottorando Roberto Cavassi, iscritto al Dottorato di Ricerca in Matematica e Modelli, XXXVII ciclo, del nostro Dipartimento.
- Da marzo a maggio 2022 ho insegnato 12 ore di corso di dottorato “Inverse Problems in Signal processing New results and open challenges” per il nostro Dottorato di Ricerca in Matematica e Modelli.
- Sono stato membro della Commissione per il Bando per la selezione di studenti con titolo di studio straniero, idonei all'immatricolazione alle lauree magistrali internazionali a.a. 2022/2023, da utilizzare anche per l'assegnazione di eventuali contributi economici e/o borse di studio in Matematica.

3 Altre attività

- Da luglio 2021 sono guest editor di una special issue del rivista *Applied and Computational Harmonic Analysis* intitolata “Recent advances in time-frequency and time-scale methods for signal and big data analysis”, insieme a Enza Pellegrino (Univaq), Yang Wang (The Hong Kong University of Science and Technology) e Haomin Zhou (Georgia Tech).

- Da settembre 2021 sono editore della rivista *Advances in Data Science and Adaptive Analysis*,
- Sto organizzando in veste di Direttore, membro del comitato scientifico e membro del comitato organizzativo una seconda Scuola Estiva e Conferenza in “Mathematics for Signal processing and Applications in Geophysics and other fields” che si svolgerà a Roma e, in contemporanea, online a maggio 2023. Lecturer confermati per i tre corsi della Scuola sono: Charles Chui (Università di Stanford), Monica Dörfler (Università di Vienna), Andrea Morelli (INGV, Bologna). Comitato scientifico: Antonio Cicone (UnivAQ), Giorgia De Franceschi (INGV), Patrick Flandrin (ENS de Lyon), Charles (Chuck) Rino (Boston College), Stefano Serra-Capizzano (Insubria), Yang Wang (HKUST), Hau-Tieng Wu (Duke University), Haomin Zhou (Gatech).
- Da maggio 2021, sono membro del collegio dei docenti del Dottorato di Ricerca in Informatica e Matematica del calcolo dell’Università degli Studi dell’Insubria.
- Sono associato di ricerca all’Istituto Nazionale di Astrofisica (INAF), Roma, da aprile 2021.
- Sono associato di ricerca Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (INGV), Roma, da marzo 2021.
- Dal primo agosto è arrivato presso il nostro Dipartimento Feng Zhou, Professore Associato della “Guangdong University of Finance and Economics” in veste ufficiale di Visiting Researcher del nostro Ateneo. Il Prof. Zhou ha vinto recentemente una prestigiosa borsa del China Scholarship Council (CSC) per periodi di ricerca all’estero ed ha deciso di spenderla interamente per trascorrere un anno di ricerca qui a L’Aquila. Sarà con noi fino a fine luglio 2023.

4 Inviti a Conferenze e Seminari

In questo ultimo anno ho presentato i seguenti talk e seminari su invito

- *Mathematics for Signal Processing: a new generation of algorithms for the decomposition and analysis of nonlinear and nonstationary signals.* INGV (online). 2 novembre, 2021.
- *Inverse Problems in Signal Processing. New results from Mathematics and open challenges.* VIT-AP University, India (online). 2 maggio, 2022.
- *On the time-frequency representation of nonstationary signals: old problems and new opportunities.* Workshop on MAThematical CHallenges to and from new technologiES (MATCHES) 2022, Università di Roma La Sapienza (Roma, Italy). 23 giugno, 2022.
- *Nonstationary Signals Analysis: New opportunities from the Mathematics of Signal Processing.* Machine Learning in Gravitational Wave search: g2net next challenges, European Gravitational Observatory (EGO) in Cascina (Pisa, Italy). 29 settembre, 2022.

5 Elenco delle pubblicazioni

5.1 Articoli accettati su Rivista

1. H. Akbari, M. T. Sadiq, N. Jafari, J. Too, N. Mikaeilvand, A. Cicone, S. Serra-Capizzano Recognizing seizure using Poincaré plot of EEG signals and Graphical features in DWT domain. Bratislava Medical Journal, 2022.
2. A. G. Wood, L. Alfonsi, L. B. N. Clausen, Y. Jin, L. Spogli, J. Urbar, J. T. Rawlings, I. C. Whittaker, G. D. Dorrian, P. Hoeg, C. Cesaroni, A. Cicone, J. Miedzik, E. Gierlach, P. Kochanska, P. Wojtkiewicz, G. Shahtahmassebi, W. J. Miloch. Variability of Ionospheric Plasma: Results from the ESA Swarm Mission. Space Science Reviews, 2022.

3. J. Urbar, L. Spogli, A. Cicone, L. B. N. Clausen, Y. Jin, A. G. Wood, L. Alfonsi, C. Cesaroni, D. Kotova, P. Hoeg, W. J. Miloch Multi-scale response of the high-latitude topside ionosphere to geospace forcing. *Advances in Space Research*, 2022.
4. M. Piersanti, D. Del Moro, A. Parmentier, M. Martucci, F. Palma, A. Sotgiu, C. Plainaki, G. D'Angelo, F. Berrilli, D. Recchiuti, E. Papini, L. Giovannelli, G. Napoletano, R. Iuppa, P. Diego, A. Cicone, M. Mergé, C. De Donato, R. Sparvoli, P. Ubertini, R. Battiston, P. Picozza. On the magnetosphere-ionosphere coupling during the May 2021 Geomagnetic storm. *Space Weather*, Volume 20, Issue 6, 2022.
5. G. Barbarino, A. Cicone. Conjectures on spectral properties of ALIF algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, Volume 647, pages 127-152, 2022. (arXiv: 2009.00582)
6. M. Rogalski, M. Pielach, A. Cicone, P. Zdankowski, L. Stanaszek, K. Drela, K. Patorski, B. Lukomska and M. Trusiak. Tailoring 2D Fast Iterative Filtering algorithm for low-contrast optical fringe pattern preprocessing. *Optics and Lasers in Engineering*, Volume 155, 107069, 2022. (arXiv: 2204.03392)
7. S. Sfarra, A. Cicone, B. Yousefi, S. Perilli, L. Robol, X. P. V. Maldague. Maximizing the detection of thermal imprints in civil engineering composites via numerical and thermographic results pre-processed by a groundbreaking mathematical approach. *International Journal of Thermal Sciences*, 2022.
8. A. Cicone, E. Pellegrino. Multivariate Fast Iterative Filtering for the decomposition of nonstationary signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Volume 70, pages 1521-1531, 2022.
9. A. Cicone, M. Huska, S.H. Kang, S. Morigi. JOT: a Variational Signal Decomposition into Jump, Oscillation and Trend. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Volume 70, pages 772-784, 2022.
10. J. Urbar, A. Cicone, L. Spogli, C. Cesaroni, L. Alfonsi. Intrinsic Mode Cross Correlation: a novel technique to identify scale-dependent lags between two signals and its application to ionospheric science. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2021.

5.2 Articoli a Conferenza

1. M. Rogalski, M. Pielach, M. Cywinska, A. Cicone, M. Trusiak. Applying an iterative filtering method for optical fringe patterns preprocessing. *Optics InfoBase Conference Papers*, 2021, CF2B.4.

5.3 Articoli inviati a Rivista

1. A. Cicone, S. Serra-Capizzano, H. Zhou. One or two frequencies? The Iterative Filtering answers. (arXiv).
2. F. Zhou, A. Cicone and H. Zhou. RRCNN: A novel signal decomposition approach based on recurrent residue convolutional neural network.
3. G. Barbarino and A. Cicone. Stabilization and Variations to the Adaptive Local Iterative Filtering Algorithm: the Fast Resampled Iterative Filtering Method. (arXiv).
4. A. Cicone, W. S. Li, H. Zhou. New theoretical insights in the decomposition and time-frequency representation of nonstationary signals: the IMFogram algorithm.

6.5 Approvazione relazione tecnico-scientifica secondo anno (01.10.2021 – 31.09.2022) dott. Piergiuseppe Di Marco

Il Presidente dà lettura della relazione scientifica inviata dal dott. Piergiuseppe Di Marco per il periodo 01.10.2021 – 30.09.2022 che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

VISTO il Regolamento Generale del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica emanato con D.R. 1923 del 07.08.2012

VISTO il vigente Regolamento per l'assunzione di Ricercatori universitari a tempo determinato (emanato con D.R. n. 621/2012 del 05.04.2012) ed in particolare l'art. 12

SENTITA la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Piergiuseppe Di Marco

PRESO ATTO della verifica da parte del Direttore dello svolgimento delle attività didattiche, didattico integrative e di servizio verso gli studenti da parte del dott. Piergiuseppe Di Marco

all'unanimità/a maggioranza

approva la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Piergiuseppe Di Marco inerente il secondo anno di attività (01.10.2021 – 30.09.2022).

Relazione delle attività del Dott. Piergiuseppe Di Marco

DISIM - Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica

RTD-B ING-INF/03 – Secondo Anno

Periodo di riferimento – 01/10/2021 - 30/09/2022

Attività di ricerca

Le attività di ricerca di Piergiuseppe sono orientate allo sviluppo di modelli e algoritmi per studiare le interazioni tra protocolli radio in accesso multiplo nei contesti *massive IoT*, ovvero con elevato numero di dispositivi a bassa complessità e necessità di efficienza energetica, e *critical IoT*, ovvero con requisiti stringenti di latenza e reliability per controllo e attuazione, nell'ottica di avvicinamento allo standard per sistemi di comunicazione 6G. Nonostante ci sia una letteratura di riferimento ben consolidata su soluzioni ad-hoc e standardizzate per ciascuno di questi ambiti di applicazione, mancano studi approfonditi sulle interazioni tra i diversi livelli protocollari e gli effetti sull'accesso multiplo quando soluzioni eterogenee coesistono con requisiti stringenti. Con lo scopo comune di rivelare queste interazioni complesse e definire soluzioni innovative per i sistemi di futura generazione, le attività scientifiche nel periodo di riferimento si sono sviluppate su tre linee principali:

1) Interazioni tra livello fisico e protocolli di accesso multiplo nei sistemi beyond-5G

Piergiuseppe ha assunto il coordinamento di un progetto di ricerca per lo studio di architetture e protocolli di comunicazione ad alta efficienza energetica e affidabilità in contesti beyond-5G. In questo ambito, l'interesse della comunità di ricerca e delle aziende coinvolte nella standardizzazione è crescente verso le comunicazioni in backscattering. Piergiuseppe ha contribuito a sviluppare un modello analitico per studiare protocolli di accesso multiplo in contesti distribuiti e multi-statici, che includono la cosiddetta "diversità di cattura" al ricevitore [J.1]. A partire da questo modello, in [J.5] è stato sviluppato uno schema di accesso multiplo non ortogonale (NOMA) con dispositivi passivi in cui il numero di nodi in contesa è regolato dalla potenza di trasmissione del dispositivo illuminatore. La proposta migliora le prestazioni dei sistemi attuali in termini di efficienza spettrale, garantendo una sostanziale riduzione del consumo di energia. Questo approccio è stato adattato all'analisi dei sistemi cellulari per le comunicazioni veicolari in side-link (ovvero senza il coordinamento dell'infrastruttura di rete), come presentato in [C.1], e inoltre ai sistemi ad accesso multiplo che sfruttano superfici riflettenti intelligenti (IRS), come discusso in [J.7]. Questo lavoro apre interessanti scenari di ricerca che includono la caratterizzazione elettromagnetica delle IRS (e.g., [C.2]) e che sono oggetto di una proposta di ricerca sottomessa al bando PRIN 2022, in cui Piergiuseppe è *principal investigator*.

2) Interazioni tra livello fisico e algoritmi per la localizzazione basati su tecnologia Bluetooth

Piergiuseppe ha portato avanti come responsabile scientifico un progetto di Ateneo per la ricerca di base sulla definizione di infrastrutture di rete basate su tecnologia Bluetooth a supporto di applicazioni di localizzazione e tracciamento dei contatti. I risultati ottenuti, pubblicati in [B.1], riguardano la proposta e validazione di una soluzione che sfrutta una architettura asimmetrica con dispositivi fissi e mobili di tracciamento. Attraverso prove sperimentali, è stata valutata la sensibilità del servizio di notifica dell'esposizione alle soglie di rilevazione della potenza, all'interferenza di accesso multiplo, e alla durata dell'esposizione, dimostrando le criticità della soluzione standard di Google e Apple.

Uno schema di rilevamento di prossimità e di direzione per servizi di navigazione indoor di veicoli è stato invece proposto in [J.6]. Questa soluzione consente a un dispositivo mobile portatile all'interno di un veicolo in movimento di rilevare autonomamente la sua posizione approssimativa e la direzione di movimento osservando solo i valori di potenza ricevuta da trasmettitori multi-antenna Bluetooth.

Un aspetto rilevante in questo ambito è la necessità di proporre soluzioni innovative ma integrabili con gli standard esistenti, come risulta evidente dai brevetti [P.1] e [P.2] approvati nel periodo di riferimento.

3) Interazioni tra livello fisico e applicazioni di controllo nei sistemi di automazione industriale

In collaborazione con la Chungnam National University in Corea del Sud, e il Royal Institute of Technology in Svezia, Piergiuseppe ha portato avanti un lavoro sulle interazioni cross-layer tra protocolli di comunicazione wireless e sistemi di controllo e attuazione, proponendo un approccio integrato per le trasmissioni dei dati di monitoraggio e il calcolo del segnale di controllo seguendo il paradigma dell'*over-the-air computation* [J.2]. Il

lavoro è stato esteso definendo uno schema di allocazione della potenza di trasmissione per il controllore [J.3]. Lo schema progettuale proposto riduce essenzialmente al minimo l'effetto del rumore introdotto dal canale wireless sull'uscita del sistema di controllo, considerando i limiti di potenza di trasmissione sul canale wireless. Lo schema proposto mostra un significativo aumento delle prestazioni di controllo rispetto al benchmark, pur avendo un consumo di potenza di trasmissione comparabile. Nell'ambito della collaborazione con la Changum National University, è stato sviluppato anche un modello per la diagnosi di errori nei sistemi di automazione industriale utilizzando la trasformata Wavelet e algoritmi di apprendimento automatico [J.4].

Attività di coordinamento scientifico

- Responsabile progetto di Ateneo per la ricerca di base 2020-2022: *"A Bluetooth-based infrastructure for contact tracing in healthcare facilities"* con il MESVA e Silvair Sp. Z.o.o.
- Responsabile scientifico del progetto di ricerca del dott. Roberto Valentini, RTD-A: *"Studio di architetture e protocolli di comunicazione ad alta efficienza energetica e affidabilità in contesti 5G and beyond-5G"* 2022-2025
- PhD supervisor di Abdul Rehman, *dottorato in ICT XXXVI* ciclo.
- Relatore tesi di laurea in Ingegneria dell'Informazione: Ilaria Faricelli (19/03/22), Leonardo Taddei (08/06/22).

Attività editoriale

- Editor per la rivista *IEEE Communications Letter* (da Giugno 2022)
- Guest Editor e Topic Editor per la rivista *MDPI Journal of Sensor and Actuator Networks*. 2022

Attività didattiche

- Docente e presidente di commissione per l'insegnamento di *Analisi ed Elaborazione dei Segnali*, corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione, tenuto congiuntamente con il Prof. Fortunato Santucci. A.A. 2021/2022. 6 CFU erogati.
- Docente e presidente di commissione per l'insegnamento di *Statistical signal processing and multimedia*, corso di laurea magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni, tenuto congiuntamente con la Dott.ssa Claudia Rinaldi. A.A. 2021/2022. 2 CFU erogati.
- Docente per l'insegnamento di *Advanced and software defined networks*, corso di laurea magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni, tenuto congiuntamente con il Prof. Fortunato Santucci e il Dott. Andrea Marotta. A.A. 2021/2022. 3 CFU erogati.
- 3 ore di seminari al corso di *Comunicazioni Wireless*, corso di laurea magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni. A.A. 2021/2022

Attività di servizio

- Membro *Collegio di Dottorato in ICT* A.A. 2021-2022.
- Membro *commissione per le pratiche studenti* del CAD in Ingegneria delle Telecomunicazioni A.A. 2021-2022.
- Membro *commissione per le pratiche studenti* del CAD in Ingegneria dell'Informazione A.A. 2021-2022.
- Membro *commissione congiunta per l'orientamento* per i CAD in Ingegneria dell'Informazione, Ingegneria delle Telecomunicazioni, e Ingegneria Informatica e Automatica A.A. 2021-2022.
- Membro *commissione per l'internazionalizzazione* del DISIM nel triennio 2021-2024.
- Membro *commissione TOLC@CASA* del CISIA (03/09, 24/02, 15/09)
- Membro *commissione concorso* per l'ammissione ai corsi di Dottorato di Ricerca XXXVIII ciclo – A.A. 2022/2023
- Membro di *commissione concorso* di selezione per l'ammissione al Pinkamp 2022
- Membro di *commissione concorso* per l'assegnazione di borse di studio del Programma Erasmus+ A.A. 2022/2022

Pubblicazioni nel periodo di riferimento

Riviste internazionali

- [J.1] Roberto Valentini, Piergiuseppe Di Marco, Roberto Alesii, and Fortunato Santucci: *Cross-layer analysis of multi-static RFID systems exploiting capture diversity*. IEEE Transactions on Communications. 69(10):6620-6632. October 2021
- [J.2] Pangun Park, Piergiuseppe Di Marco, and Carlo Fischione: *Wireless for control: over-the-air controller*. IEEE Communications Letters. 10(25):3437-3441, October 2021
- [J.3] Pangun Park, Piergiuseppe Di Marco, and Carlo Fischione: *Optimized Over-the-Air Computation for Wireless Control Systems*. IEEE Communications Letters. 26(2), 424-428, February 2022
- [J.4] Junseong Bang, Piergiuseppe Di Marco, Hyejeon Shin, and Pangun Park: *Deep Transfer Learning-based Fault Diagnosis using Wavelet Transform for Limited Data*. Applied Sciences. 12(15):7450. July 2022
- [J.5] Roberto Valentini, Piergiuseppe Di Marco, and Fortunato Santucci: *A NOMA Scheme for IoT Enabled by Selective Powering of Passive Backscattering Nodes*. IEEE Communications Letters. 26(9):2195-2199. September 2022
- [J.6] Pangun Park, Piergiuseppe Di Marco, Mingyu Jung, Fortunato Santucci, and Taekyung Sung: *Differential RSS-based Indoor Vehicle Localization using Multi-directional Beacon*. IEEE Internet of Things Journal. (Early access) 10.1109/JIOT.2022.3199814
- [J.7] Piergiuseppe Di Marco, Roberto Valentini, Fortunato Santucci, Giuseppe Pettanice, and Giulio Antonini: *Boosting NOMA systems through smart metasurfaces*. Frontiers in Communications and Networks. (Early access) 10.3389/frcmn.2022.995135

Capitoli di libro

- [B.1] Piergiuseppe Di Marco, Pangun Park, Marco Pratesi, and Fortunato Santucci: *Contact tracing for healthcare facilities using Bluetooth*. In "The Science behind the COVID Pandemic and Healthcare Technology Solutions", Sasan Adibi ed. Springer, New York, 2022.

Atti di conferenze internazionali

- [C.1] Abdul Rehman, Piergiuseppe Di Marco, Roberto Valentini, and Fortunato Santucci: *Analytical Modeling of Multiple Access Interference in C-V2X Sidelink Communications*. IEEE International Mediterranean Conference on Communications and Networking (MeditCom). Athens, Greece. September 2022.
- [C.2] Giuseppe Pettanice, Fabrizio Loreto, Daniele Romano, Fortunato Santucci, Piergiuseppe Di Marco, Giulio Antonini, and Roberto Alesii: *Time-domain Characterization of Reconfigurable Intelligent Surfaces for Wireless Communications*. International Symposium and Exhibition on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe). Gothenburg, Sweden. September 2022.

Brevetti

- [P.1] Anna Larmo, Piergiuseppe Di Marco: Method and device for updating the number of retransmissions in a wireless mesh network. US Patent App. 11153803. October 2021. (granted)
- [P.2] Jingcheng Zhang, Thomas Rimhagen, Wei Shen, Per Skillermark, Per Elmdahl, and Piergiuseppe Di Marco: Handling communication of data in a Bluetooth low energy (BLE), mesh network. EP3643093B1. October 2021. (granted)

L'Aquila, 30 Settembre 2022

Piergiuseppe Di Marco



6.6 Approvazione relazione tecnico-scientifica secondo anno (01.11.2021 - 31.10.2022) dott. Fabio Persia

Il Presidente dà lettura della relazione scientifica inviata dal dott. Fabio Persia per il periodo 02.11.2021 – 01.11.2022 che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

VISTO il Regolamento Generale del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica emanato con D.R. 1923 del 07.08.2012

VISTO il vigente Regolamento per l'assunzione di Ricercatori universitari a tempo determinato (emanato con D.R. n. 621/2012 del 05.04.2012) ed in particolare l'art. 12

SENTITA la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Fabio Persia

PRESO ATTO della verifica da parte del Direttore dello svolgimento delle attività didattiche, didattico integrative e di servizio verso gli studenti da parte del dott. Fabio Persia

all'unanimità

approva la relazione tecnico-scientifica presentata dal dott. Fabio Persia inerente il secondo anno di attività (02.11.2021 – 01.11.2022).



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DELL'AQUILA



DISIM
Dipartimento di Ingegneria
e Scienze dell'Informazione
e Matematica

University of L'Aquila
**Department of Information Engineering, Computer Science
and Mathematics**

RTD Research and Teaching Activities Report
Second-Year Report (from 01.11.2021 to 31.10.2022)

Dr. Fabio Persia

Tenure-Track Assistant Professor (RTD/B)

SSD: INF/01

October 2022

1 – Introduction

This report presents a summary of the research and teaching activities carried out by Dr. Fabio Persia under an RTD/B contract in the scientific disciplinary field INF/01 from Nov. 01, 2021 to Oct. 31, 2022.

His research activities in this year were mainly focused on the complex event processing (CEP) research area, but also concerned other areas, such as databases, route planning, and recommender systems. He was also involved in the application of CEP (coupled with Multi-Agent Systems) in the field of healthcare, precisely personalized home assistance of patients with chronic diseases.

During the academic year 2021/2022, he taught the new optional course of “Intelligent Knowledge Representation and Processing for Event Detection” at the Master’s degree in Computer Science (48 hours), and “Informatica per le Aziende” at the Bachelor’s degree in Business Legal Operator (21 hours).

Future work will be devoted to further strengthen his collaboration with the Artificial Intelligence research group of the University of L’Aquila, extending the work already started, submitting papers to top journals and conferences, and trying to attract funding to finance his work. During the academic year 2022/2023, he will be likely teaching the “Basi di Dati” course at the Bachelor’s degree in Computer Science, and again the “Informatica per le Aziende” course at the Bachelor’s degree in Business Legal Operator, (35 hours).

2 – Memberships, Awards and Honors

- **Honors:** Italian National Scientific Habilitation (ASN) as Associate Professor in the scientific-disciplinary sector ING-INF/05, from 13/11/2020 to 13/11/2029.
- **Honors:** Italian National Scientific Habilitation (ASN) as Associate Professor in the scientific-disciplinary sector INF/01, from 23/11/2020 to 23/11/2029.
- **Honors:** sponsorship from the Department of Information Engineering, Computer Science and Mathematics of the University of L’Aquila for the IEEE International Symposium on Multimedia (IEEE ISM 2022), that will take place in Naples from December 5 to December 7.
- **Membership:** IEEE Technical Committee on Semantic Computing (TCSEM) officer on Conference Activities.
- **Membership:** Consiglio di Area Didattica [CAD] for the Degree of Computer Science of University of L’Aquila 2022/2023.
- **Membership:** Consiglio di Area Didattica [CAD] for the Degree of Computer Science of University of L’Aquila 2021/2022.
- **Membership:** Graduation Committee substitute member, Bachelor’s degree in Computer Science, University of L’Aquila, July 2022.
- **Membership:** Member of the “Gruppo Ricercatori ed Utenti di Logic Programming” (GULP), 2022.
- **Membership:** Member of the organizing committee for the Computer Science Career Day 2021, University of L’Aquila, November 2021.
- **Membership:** Member of the committee for TOLC@CASA, University of L’Aquila, September 2022.
- **Membership:** Member of the committee for a public selection procedure based on qualifications and interview for the award of no. 32 positions for the performance of teaching exercises and support activities for freshmen and activities of support to female and international students, University of L’Aquila, July 2022.
- **Membership:** Member of the committee for the competition for one scholarship for research activities having as subject “Sistemi di Monitoraggio Rete Ferroviaria Italiana: supervisione e validazione riguardanti gli algoritmi di supporto decisionale al monitoraggio”, March 2022.
- **Membership:** Member of the committee for the competition for one research assistant position working on the topic: “Agenti Intelligenti Logici: aspetti fondazionali e applicazioni in campo green”, April 2022.
- **Membership:** Member of “Ordine degli Ingegneri della Provincia di Napoli”, 2022.

3 - Given Talks

- M. Ge, G. Pilato, *F. Persia* and D. D'Auria: "New Perspectives on Recommender Systems for Industries", Fifth IEEE International Conference on Artificial Intelligence for Industries (IEEE ai4i 2022), September 19, 2022, Laguna Hills, California, USA.
- L. De Lauretis, *F. Persia* and S. Costantini, "A Smart Ecosystem to improve Patient Monitoring using Wearables, Intelligent Agents, Complex Event Processing and Image Processing", 2022 IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC), July 1, 2022, online presentation.

4 – Research Activities

4.1 – Summary of citation data

- **Scopus Citation Report (AuthorSearch):** Total Citations: 657; H-index: 15.
- **Google Scholar Report (MyCitations):** Total Citations: 927; H-index: 18.

4.2 - Publications

On the one hand, dr. Fabio Persia completed some research activities he had previously started, which allowed him to achieve a relevant journal publication on IEEE Transactions [J1], a publication on an IEEE conference [P4], and potentially (and hopefully) four other publications on top-ranked journals [UR3], [UR4], [UR5], [UR6], since such papers are still under review. On the other hand, he continued working with the Artificial Intelligence research group of the Department of Information Engineering, Computer Science and Mathematics of the University of L'Aquila; specifically, he focused on applying complex event processing techniques to the e-health domain, as demonstrated by the publications [P1], [P2] and [P3], and the potential publications (still under review) [UR1] and [UR2]. Future work will be devoted to further extend the work already started, submit papers to top journals and conferences, and trying to attract third-party funding.

4.2.1 – International Journals

[J1] G. Pilato, *F. Persia*, M. Ge and D. D'Auria, "Social Sensing for Personalized Orienteering Mediating the Need for Sociality and the Risk of COVID-19", in IEEE Transactions on Technology and Society, 2022, doi: 10.1109/TTS.2022.3210882.

4.2.2 – International Proceedings

[P1] L. De Lauretis, *F. Persia* and S. Costantini, "A Smart Ecosystem to improve Patient Monitoring using Wearables, Intelligent Agents, Complex Event Processing and Image Processing", 2022 IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC), 2022, pp. 1-7, doi: 10.1109/ISCC55528.2022.9912829.

[P2] L. De Lauretis, *F. Persia* and S. Costantini, "Intelligent Agents and Complex Event Processing to enhance Patient Monitoring", Datalog 2.0 2022: 4th International Workshop on the Resurgence of Datalog in Academia and Industry, September 05, 2022, Genova - Nervi, Italy.

[P3] S. Costantini, *F. Persia*, L. De Lauretis, "An Intelligent Ecosystem to improve Patient Monitoring using Wearables and Artificial Intelligence", CILC 2022: 37th Italian Conference on Computational Logic, June 29 – July 1, 2022, Bologna, Italy.

[P4] M. Ge, G. Pilato, *F. Persia* and D. D'Auria: "New Perspectives on Recommender Systems for Industries", Fifth IEEE International Conference on Artificial Intelligence for Industries (IEEE ai4i 2022), September 19-21, 2022, Laguna Hills, California, USA.

4.2.3 – Papers under Review

[UR1] L. De Lauretis, *F. Persia*, S. Costantini and D. D'Auria, "How to exploit Intelligent Agents and Complex Event Processing to improve Patient Monitoring", submitted to the Journal of Logic and Computation, ranked Q2 according to Scimago.

[UR2] C. Bertoncelli, S. Costantini, *F. Persia* and D. D'Auria, "PredictMed-Epilepsy: A Multi-agent based System for Epilepsy Detection and Prediction in Neuropediatrics", submitted to Computer Methods and Programs in Biomedicine, ranked Q1 according to Scimago.

- [UR3] G. Pilato, F. Persia and M. Ge, “A Modular Social Sensing System for Personalized Orienteering in the COVID-19 Era”, submitted to ACM Transactions on Management Information Systems (TMIS), ranked Q1 according to Scimago.
- [UR4] F. Persia, A. Dignös, S. Helmer and J. Gamper, “Modeling and Detecting High-Level Events in the Social Network Analysis Context Exploiting ISEQL+”, submitted to the Online Social Networks and Media (OSNEM), ranked Q1 according to Scimago.
- [UR5] F. Persia, G. Pilato, M. Ge, D. D’Auria, “Recommender System for Social Media: Research Challenges and Future Applications”, submitted to the Online Social Networks and Media (OSNEM), ranked Q1 according to Scimago.
- [UR6] F. Persia, D. D’Auria, M. Ge, G. Pilato, “Improving the Learning Performance by Exploiting Multimedia in eXtreme Apprenticeship”, submitted to the Multimedia Tools and Applications (MTAP) journal, ranked Q2 according to Scimago.

4.3 – Pending Grant Applications

- *TrustPACTX - Design of the Hybrid Society Humans-Autonomous Systems: Architecture, Trustworthiness, Trust, EthiCs, and Explainability (the case of Patient Care)*, submitted to PRIN 2022, (as a member of the University of L’Aquila unit).

4.4 – Ongoing Collaborations

- Prof. Claudio Ferri, Medicine Department, University of L’Aquila, L’Aquila, Italy.
- DBS Research Group, Faculty of Computer Science, Free University of Bozen-Bolzano, Bozen-Bolzano, Italy.
- Prof. Sven Helmer, Database Technology group, Department of Informatics, University of Zurich, Zurich, Switzerland.
- Prof. Mouzhi Ge, Faculty of European Campus Rottal-Inn, Deggendorf Institute of Technology, Deggendorf, Germany.
- Dr. Giovanni Pilato, Institute for High Performance Computing and Networking, National Research Council of Italy, Palermo, Italy.
- Prof. Phillip Sheu, Donald Bren School of Information and Computer Science, University of California, Irvine, California, USA.

4.5 – Scientific Community Service

4.5.1 – Editorial Activities

- Associate Editor of International Peer Reviewed Journal
 - International Journal of Humanized Computing and Communication (IJHCC) – KS PRESS, (Editor in Chief).
 - Editorial Board Member of the Encyclopedia with Semantic Computing and Robotic Computing (ESCRI) – World Scientific.
 - Associate Editor of the International Journal of Semantic Computing (IJSC) – World Scientific.
- Special Issue Editor
 - International Journal of Semantic Computing (IJSC) – World Scientific, Vol. 16, No. 2 (2022).
 - Frontiers in Big Data – Special Issue on Multimedia Big Data Analytics.
- Reviewer for Journals
 - Intelligent Systems with Applications – Elsevier.
 - International Journal of Semantic Computing (IJSC) – World Scientific.
 - The Knowledge Engineering Review – Cambridge Core.

- Reviewer for Conferences
 - The 37th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2023).
 - The 8th IEEE International Conference on Multimedia Big Data (BigMM 2022).
 - The 5th and 6th IEEE Robotic Computing (IEEE IRC 2021, IEEE IRC 2022).
 - The 16th and 17th IEEE International Conference on Semantic Computing (IEEE ICSC 2022, IEEE ICSC 2023).
 - AVI 2022 (2022 International Conference on Advanced Visual Interfaces).
 - The 4th and 5th IEEE International Conference on Artificial Intelligence & Knowledge Engineering (IEEE AIKE 2021, IEEE 2022).
 - Critical Infrastructures (CI) ACM'23 Track @ The 38th ACM Symposium on Applied Computing (SAC 2023).
 - The 5th IEEE International Conference on Artificial Intelligence for Industries (AI4I 2022).

4.5.2 – Conference Organization

- General Co-Chair of IEEE ISM 2022 – 24th IEEE International Symposium on Multimedia, December 5-7, 2022, Naples, Italy.
- General Co-Chair of IEEE ISM 2021 – 23rd IEEE International Symposium on Multimedia, November 29 - December 1, 2021, virtual.
- Program Co-Chair of IEEE BigMM 2021 – IEEE Multimedia Big Data, November 15-17, 2021, virtual.
- Program Co-Chair of IEEE TransAI 2022 – IEEE International Conference on Transdisciplinary AI, September 19-21, 2022, Laguna Hills, California, USA.
- Workshop Co-Chair of IEEE ICSC 2022 – 16th IEEE International Conference on Semantic Computing, January 26-28, 2022, virtual.
- Workshop Co-Chair of IEEE ICSC 2023 – 17th IEEE International Conference on Semantic Computing, February 1-3, 2023, Laguna Hills, California, USA.
- Co-Chair of the Fifth International Workshop on New Frontiers in Computational Robotics (NFCR '22), in conjunction with the The Sixth IEEE International Conference on Robotic Computing, December 7, 2022, Naples, Italy.

5 – Teaching Activities

5.1 – Courses taught as main Lecturer

- “Intelligent Knowledge Representation and Processing for Event Detection”, optional course at the Master in Computer Science, University of L'Aquila, Second Semester, Academic Year 2021/22, 5 students, 48 hours.
- “Informatica per le Aziende”, Bachelor in Business Legal Operator, University of L'Aquila, Second Semester, Academic Year 2021/22, 20 students, 21 hours.

5.2 – External Lectures

- Teaching Assistant of the “Information Systems and Data Management” course, Bachelor in Economics and Social Sciences, Free University of Bozen-Bolzano, First Semester, Academic year 2022/23, 30 students, 30 hours.
- Invited (online) seminar at the University of Palermo, within the “Web Data Analytics” course, Master in Computer Engineering, “Event Detection with Temporal Predicates”, 2 hours, May 26, 2022.

5.3 – PhD co-(advising)

- 3rd-year PhD student Lorenzo De Lauretis, Department of Information Engineering, Computer Science and Mathematics, University of L'Aquila, starting from January 2021.

5.4 – PhD Thesis Reviewer

- Reviewer of the PhD Thesis of Antonio Galli, PhD in Technology, Innovation and Management (TIM) – XXXV cycle, University of Bergamo.

31/10/2022

Researcher
(Dr. Fabio Persia)

8.1 Aggiornamento coperture insegnamenti DISIM a.a. 2022/2023

Il Presidente informa che con D.R. n. 1383/2022 del 25.10.2022 il dott. Luigi FORCELLA, ricercatore universitario a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3, lettera a) della legge 30/12/2010 n. 240 per il S.S.D. MAT/05 – Analisi Matematica, ha cessato dal servizio presso questo Ateneo a far data dal 28.10.2022.

La prof.ssa Donatella Donatelli, referente dell'area, sentita la Presidente del CAD interessato ha proposto la seguente riassegnazione di coperture:

Insegnamento di “Analisi Matematica A” per il Corso di laurea in Matematica - codice DT0014: Il dott. Luigi Forcella avrebbe dovuto coprire 30 ore: 15 ore di Analisi Matematica A mod. I e 15 ore di Analisi Matematica A mod. II

Poiché il dott. Luigi Forcella ha svolto 15 ore dell'insegnamento di “Analisi Matematica A mod. I”, restano scoperte 15 ore dell'insegnamento di “Analisi Matematica A mod. II”, che saranno coperte dalla prof.ssa Cristina Pignotti.

Insegnamento di “Mathematical Fluid and Biofluid Dynamics” per il Corso di laurea magistrale in Matematica – codice DT0611: Il dott. Luigi Forcella avrebbe dovuto coprire 30 ore, ma ne ha svolte solo 18, e quindi le restanti 12 saranno coperte dalla prof.ssa Donatella Donatelli, già assegnataria sul medesimo insegnamento di un carico da 60 ore.

Il Consiglio

VISTO D.R. n. 1383/2022 del 25.10.2022 di risoluzione anticipata del contratto del dott. Luigi Forcella

all'unanimità/ a maggioranza

delibera la seguente riassegnazione delle ore di copertura rimaste scoperte:

- l'insegnamento di “Analisi Matematica A mod. II” del Corso di laurea in Matematica, I semestre, sarà svolto dalla **prof.ssa Cristina Pignotti** per le 15 ore rimaste scoperte;
- l'insegnamento di “Mathematical Fluid and Biofluid Dynamics” del Corso di laurea magistrale in Matematica, I semestre, sarà svolto dalla **prof.ssa Donatella Donatelli** per le 12 ore rimaste scoperte.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

* * * * *

Il Presidente informa che con DR n. 1412 del 26.10.2022 la dott.ssa Teresa SCARINCI, Ricercatrice a tempo determinato ai sensi dell'art. 24, comma 3, lettera a) della legge 30/12/2010 n. 240 per il S.S.D. MAT/05 – Analisi Matematica, ha cessato dal servizio presso questo Ateneo per risoluzione anticipata per accordo fra le parti a far data dal 27 ottobre 2022.

8.1 Aggiornamento coperture insegnamenti DISIM a.a. 2022/2023

La prof.ssa Donatella Donatelli, referente dell'area, sentiti i CAD interessanti ha proposto le seguenti riassegnazioni di copertura:

Insegnamenti presso il DISIM:

Insegnamento di "Analisi Matematica" per il Corso di laurea in Matematica - codice DT0002: la dott.ssa Scarinci ha svolto 6 ore delle 20 ore che avrebbe dovuto fare. Restano quindi scoperte 14 ore.

Insegnamento di "Analisi Matematica 1" per il Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione - codice I0195: la dott.ssa Scarinci ha svolto 10 ore delle 15 che avrebbe dovuto fare. Restano quindi scoperte 5 ore.

In totale restano scoperte 19 ore che copriranno i proff. Klaus Engel e Stefano Spirito, come segue:

- Le 14 ore dell'insegnamento di "Analisi Matematica" per il corso di laurea di Informatica saranno coperte dal prof. Engel.
- Per quanto riguarda l'insegnamento di "Analisi Matematica I" per il corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione, il prof. Engel che inizialmente copriva detto insegnamento per 75 ore, ne coprirà solo 66, generando una scopertura di 9 ore; le 14 ore scoperte che risultano dalla somma di tali 9 ore e delle 5 di cui sopra saranno coperte dal prof. Spirito.

Insegnamenti presso il DICEEA:

Insegnamento di "Analisi Matematica 1" per il Corso di laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, codice I0195: la dott.ssa Scarinci ha svolto 6 ore delle 30 ore che avrebbe dovuto fare. Restano quindi scoperte 24 ore che coprirà il prof. Stefano Spirito.

Il Presidente fa presente che si è proceduto a riorganizzare il carico didattico del prof. Spirito a seguito dello spegnimento dell'insegnamento a scelta di "Fundamentals of Partial Differential Equations and Numerical Methods", 60 ore I semestre del Corso di laurea di nuova istituzione di Ingegneria dei Sistemi di Controllo e dell'Automazione - curriculum Control Systems Engineering, come da nota del Presidente del CAD, prof. Stefano Di Gennaro del 11.11.2022, acquisito agli atti con prot. n. 5085 del 11.11.2022, a causa della mancanza di studenti iscritti. Il Presidente ricorda che detto insegnamento è stato assegnato a copertura ai proff. Protasov e Spirito, ciascuno per 30 ore.

Il Presidente pertanto riassume il carico didattico del prof. Spirito, del prof. Engel e del prof. Protasov per l'a.a. 2022/2023 che risulterebbe all'esito delle prospettate modifiche:

Cognome	Nome	Ruolo Docente	S.S.D. Docente	Dipartimento Docente	Dip Afferenza C.d.S.	CDS	Denominazione insegnamento	CFU	Ore
ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	F3I	ANALISI MATEMATICA	7	70
ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	I3N	ANALISI MATEMATICA I	6,6	66

8.1 Aggiornamento coperture insegnamenti DISIM a.a. 2022/2023

ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	F3I	ANALISI MATEMATICA	1,4	14
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	I3N	ANALISI MATEMATICA I	1,4	14
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DICEEA	I3A	ANALISI MATEMATICA I	2,4	24
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DICEEA	I3A	ANALISI MATEMATICA I	6	60
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	I4Y	Italian language and culture for foreigners (level B1)	3	6
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	F4M	ADVANCED ANALYSIS	3	30
PROTASOV	VLADIMIR	PO	MAT/08	DISIM	DISIM	I4W	NUMERICAL CONVEX OPTIMISATION	6	60
PROTASOV	VLADIMIR	PO	MAT/08	DISIM	DISIM	I4Y	OPTIMISATION IN SIGNAL PROCESSING AND WAVELETS	6	60

Il Consiglio

VISTO DR n. 1412 del 26.10.2022 di risoluzione anticipata del contratto della dott.ssa Teresa Scarinci

VISTO la nota del Presidente del CAD di Ingegneria dei Sistemi di Controllo e dell'Automazione prot. n. 5085 del 11.11.2022, di spegnimento dell'insegnamento opzionale di "Fundamentals of Partial Differential Equations and Numerical Methods" del corso di laurea di nuova istituzione di Ingegneria dei Sistemi di Controllo e dell'Automazione - curriculum Control Systems Engineering

all'unanimità/ a maggioranza

delibera la seguente riorganizzazione delle coperture come di seguito indicate dei proff Spirito, Engel e Protasov per l'a.a. 2022-2023:

Cognome	Nome	Ruolo Docente	S.S.D. Docente	Dipartimento Docente	Dip Afferenza a C.d.S.	CDS	Denominazione insegnamento	CFU	Ore
ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	F3I	ANALISI MATEMATICA	7	70
ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	I3N	ANALISI MATEMATICA I	6,6	66
ENGEL	KLAUS JOCHEN OTTO	PO	MAT/05	DISIM	DISIM	F3I	ANALISI MATEMATICA	1,4	14

8.1 Aggiornamento coperture insegnamenti DISIM a.a. 2022/2023

SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	I3N	ANALISI MATEMATICA I	1,4	14
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DICEEA	I3A	ANALISI MATEMATICA I	2,4	24
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DICEEA	I3A	ANALISI MATEMATICA I	6	60
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	I4Y	Italian language and culture for foreigners (level B1)	3	6
SPIRITO	STEFANO	PA	MAT/05	DISIM	DISIM	F4M	ADVANCED ANALYSIS	3	30
PROTASOV	VLADIMIR	PO	MAT/08	DISIM	DISIM	I4W	NUMERICAL CONVEX OPTIMISATION	6	60
PROTASOV	VLADIMIR	PO	MAT/08	DISIM	DISIM	I4Y	OPTIMISATION IN SIGNAL PROCESSING AND WAVELETS	6	60

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

* * * * *

Il Presidente informa che occorre procedere al completamento della copertura del modulo di “Tools and Applications for Structural Biology” per 1 cfu 8 ore per il corso di laurea Magistrale in Applied Data Science.

Il Presidente del CAD di Applied Data Science con nota del 9 novembre 2022, sentito il referente dell'area MESVA ha proposto di affidare al dott. Matteo Ardini, vincitore della procedura rtdb in Bio10 – Biochimica presso il Dipartimento MESVA, il modulo di “Tools and Applications for Structural Biology” per 1 cfu 8 ore. Il Presidente ricorda che la prima parte del modulo per 2 cfu 16 ore è stata assegnata al prof. Angelucci Francesco.

Detta copertura sarà portata a ratifica al prossimo consiglio utile del CAD in Applied Data Science.

Il Consiglio

VISTA la nota del Presidente del CAD di Applied Data Science del 9 novembre 2022

SENTITO il referente dell'area MESVA, prof. Francesco Angelucci

all'unanimità/ a maggioranza

delibera di affidare al dott. Matteo Ardini, vincitore della procedura rtdb in Bio10 – Biochimica presso il Dipartimento MESVA, il modulo di “Tools and Applications for Structural Biology” per 1 cfu 8 ore – I semestre a.a. 2022-2023.

8.1 Aggiornamento coperture insegnamenti DISIM a.a. 2022/2023

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

8.2 Prolungamento sessione di esami straordinaria a.a. 2021/2022 dall'11 novembre 2022 al 23 novembre 2022 - Insegnamento di "Algoritmi e strutture dati con laboratorio", Corso di Laurea in Informatica - prof. Guido Proietti e dott.ssa Giovanna Melideo.

Il Presidente informa che occorre prolungare la sessione straordinaria d'esame a.a. 2021-2022 dall'11 novembre 2022 al 23 novembre 2022 per l'insegnamento di "Algoritmi e strutture dati con laboratorio" del Corso di Laurea in Informatica, tenuto dal prof. Guido Proietti e dalla dott.ssa Giovanna Melideo, per motivi di salute della dott.ssa Giovanna Melideo.

Il Presidente invita il Consiglio ad esprimersi.

Il Consiglio

VISTA la nota della dott.ssa Giovanna Melideo del 08 novembre 2022

all'unanimità/ a maggioranza

delibera il prolungamento della sessione straordinaria d'esame dall'11 novembre 2022 al 23 novembre 2022 per l'insegnamento di "Algoritmi e strutture dati con laboratorio" del Corso di Laurea in Informatica.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

9.4 Utilizzo finanziamento di Ateneo 2021 per Assegni di Ricerca

Il Presidente informa preliminarmente che è stata comunicata l'assegnazione del budget di dipartimento per il 2023, pari ad un totale di euro 455.700,00 a fronte di uno stanziamento di euro 560.000 nel 2022, con una decurtazione quindi pari ad euro 110.300, ovvero del 19,7%. Questo taglio è generalizzato per tutti i dipartimenti, e non rappresenta quindi una penalizzazione specifica del DISIM.

Ciò premesso, al fine di ottemperare alle nuove disposizioni in materia di reclutamento con particolare riguardo alla trasformazione a decorrere dal 2023 degli assegni di ricerca nei ben più onerosi contratti di ricerca, questa è l'ultima occasione per deliberare gli assegni di ricerca, che verranno approvati dal CdA del 23.11.2022 e poi banditi entro la fine dell'anno.

Tenuto conto del taglio lineare del 19,7% del finanziamento complessivo, ma tenuto anche conto che il nostro dipartimento ha ad oggi un numero di afferenti pari a 116, con un aumento quindi dell'8,41% rispetto ai 107 dell'inizio dell'anno, la quota assegni è stata rideterminata pari a 100.000,00 euro rispetto ai 108.000,00 euro dello scorso anno, con un taglio assoluto quindi di circa solo il 7%.

Si noti a latere che una quota parte di quello che avremmo tradizionalmente destinato agli assegni di ricerca andrà riservata per co-finanziare i tre contratti di ricerca che abbiamo ipotizzato di avviare nel 2023 a valere sul DM 737/2021, quindi il taglio avrebbe potuto essere ben maggiore, ma si conta di riuscire a reperire queste risorse aggiuntive mediante opportune operazioni di bilancio, nonché utilizzando 42.000 Euro che ci sono stati destinati dalla redistribuzione dell'overhead sui fondi PON del 2019 (quelli utilizzati per gli RTD-a PON).

Le risorse attribuite alle macroaree proporzionalmente agli afferenti risulta pertanto essere:

	TOTALE	Area Matematica	Area Informatica	Area Ingegneria
Assegni di ricerca	100.000,00	44.827,59	25.000,00	30.172,41

Sono state raccolte le richieste di tutte le aree, che vengono qui di seguito elencate (gli assegni di nuova istituzione sono evidenziati in colore ocra):

CONSIGLIO DI DIPARTIMENTO

Università degli Studi dell'Aquila

Proposta di delibera

Dipartimento di Ingegneria e Scienze
dell'Informazione e Matematica

9.4 Utilizzo finanziamento di Ateneo 2021 per Assegni di Ricerca

Titolo del progetto	Settore Scientifico-Disciplinare	Responsabile	Requisiti di accesso	Destinatari (Early/Experienced)	Trattasi di rinnovo? Se sì, indicare nominativo e data avvio rinnovo	Ammontare assegno	Numero di mensilità co-finanziate su fondi di ricerca (almeno 3 mensilità)	Fondo di cofinanziamento (indicare il nome del fondo e il titolare; possono essere attinti al più due fondi, e su ciascun fondo il cofinanziamento deve essere un multiplo della mensilità)	Quota di Ateneo Attenzione: la quota di Ateneo non può essere superiore alle mensilità erogabili nel 2023; i nuovi assegni partiranno dall'1/4/2023	Differenza rispetto all'attribuzione
Modellazione di sistemi autonomi ethical-aware	INF/01 (e M-FIL/02)	Prof. Marco Autili	Laurea Magistrale in FILOSOFIA E COMUNICAZIONE Classe LM-92 - Classe delle lauree magistrali in Teorie della Comunicazione - D.M. 270/2004	Early	No	24.000,00 €	3	ConnectPA (resp. Tivoli)	18.000,00 €	
Totale						24.000,00 €	3		18.000,00 €	-7.000,00 €
Proposte area ING										
Titolo del progetto	Settore Scientifico-Disciplinare	Responsabile/i	Requisiti di accesso	Destinatari (Early/Experienced)	Trattasi di rinnovo? Se sì, indicare	Ammontare assegno	Numero di mensilità	Fondo di cofinanziamento (indicare il nome del	Quota di Ateneo Attenzione:	Differenza rispetto all'attribuzione

CONSIGLIO DI DIPARTIMENTO

Università degli Studi dell'Aquila

Proposta di delibera

Dipartimento di Ingegneria e Scienze
dell'Informazione e Matematica

9.4 Utilizzo finanziamento di Ateneo 2021 per Assegni di Ricerca

					nominativo e data avvio rinnovo		co- finanziate su fondi di ricerca (almeno 3 mensilità)	fondo e il titolare; possono essere attinti al più due fondi, e su ciascun fondo il cofinanziamento deve essere un multiplo della mensilità)	la quota di Ateneo non può essere superiore alle mensilità erogabili nel 2023; i nuovi assegni partiranno dall'1/4/2023	
Sensing distribuito per applicazioni basate su tecnologie Software Defined Radio	ING-INF/03	Fabio Graziosi	Laurea Magistrale In Ingegneria dell'informazione o Affini (LM-27, LM-29, LM- 32)	Early	No	24.000,00 €	6	TASIRINALDI, Claudia Rinaldi	12.000,00 €	
Convertitori polifase e tolleranti ai guasti per applicazioni "Full electric aircraft"	ING-IND/32	Carlo Cecati	Dottorato di ricerca in Ingegneria dell'Automazione o Elettronica o Elettrica	Experienced	No	24.000,00 €	4	PRIN2017 Carlo Cecati	16.000,00 €	
TOTALE						48.000,00	10		28.000,00	-2.172,41
GRANTOTALE						168.000,00	39		90.000,00	-10.000,00

9.1 Utilizzo finanziamento di Ateneo 2023 per Assegni di Ricerca

Il Presidente informa che i risparmi maturati dalle macroaree potranno essere utilizzati in corso d'anno per eventuali rinnovi di assegni già banditi. Dopo una breve discussione

Il Consiglio,

VISTA l'assegnazione da parte dell'Ateneo di euro 455.700,00 sul Budget 2023 per le necessità del Dipartimento relative a Dottorato, Didattica, Assegni di Ricerca e funzionamento

VISTA l'assegnazione per finanziamento Assegni di ricerca pari ad euro 100.000,00

VISTA la proposta di utilizzo delle risorse per finanziamento Assegni di ricerca a valere sui fondi assegnati dell'Amministrazione per l'anno 2023

all'unanimità/a maggioranza

approva l'utilizzo delle risorse per finanziamento assegni di ricerca a valere sui fondi assegnati dell'Amministrazione per l'anno 2023 come segue:

....

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

Il Presidente pone in approvazione le singole richieste di attivazione di nuovi Assegni di ricerca con l'utilizzo del finanziamento di Ateneo anno 2023 così come approvato al punto precedente e secondo le schede presentate dai rispettivi Responsabili scientifici.

9.2.1 Richiesta attivazione Assegno di ricerca dal titolo "Problemi di ottimizzazione in Economia e Finanza" – responsabile prof. Fabio Antonelli

Il prof. Fabio Antonelli ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5155 in data 16.11.2022 con l'utilizzo del finanziamento assegni di ricerca di Ateneo per l'anno 2023 per i primi sei mesi per un importo di euro 24.000,00. Le altre mensilità saranno finanziate dalle somme disponibili sul Progetto 04CONS.INTERMATHS coordinato dal prof. Corrado Lattanzio che autorizza la spesa.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo complessivo di 24.000,00 euro.

Titolo del Progetto: *Problemi di ottimizzazione in Economia e Finanza*

SSD: SECS-S/06 - Metodi matematici dell'economia e delle scienze attuariali e finanziarie

Altri SSD interessati: MAT/06 – Probabilità e statistica matematica

Responsabile del Progetto: prof. Fabio Antonelli

Requisiti: Laurea Magistrale in Matematica (Classe LM-40) oppure Laurea Magistrale in Fisica (Classe LM-17) oppure Laurea Magistrale in Economia (Classe LM-56), corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 12.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.MATEMATICA**
- Euro 12.000,00 **04CONS.INTERMATHS**

Breve descrizione della ricerca: Qualsiasi decisione di carattere economico è basata su un concetto di ottimalità: delle allocazioni, delle proprie preferenze, etc., individuando opportune strategie che permettano di raggiungere gli obiettivi. Finalità di questa ricerca è riuscire a caratterizzare, mediante soluzioni di equazioni variazionali e/o differenziali stocastiche, le strategie ottimali per investimenti assicurativi e finanziari, in presenza di rischi di mortalità o di liquidità o di credito. Gli strumenti principali che si intendono utilizzare comprendono la teoria dei giochi, la teoria delle equazioni differenziali stocastiche, la teoria del controllo e la teoria dei giochi a campo medio.

Breve descrizione della ricerca in inglese: Any decision in economics is usually based on a notion of optimality: for allocations, for preferences etc., by identifying appropriate strategies to achieve the given objectives. Goal of this research is characterizing those optimal strategies, for finance or insurance, as solutions of variational or stochastic differential equations, also in presence of multiple risks such as mortality, liquidity and credit risks. The main mathematical tools to be employed in this task may include Game theory, the theory of Stochastic differential equations, Control theory and Mean Field Games

Il Consiglio,

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

- VISTO** il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila
VISTO il Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca
VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo *"Problemi di ottimizzazione in Economia e Finanza"* presentata dal prof. Fabio Antonelli
VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79
ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziare e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca
VISTA la propria delibera di cui al punto 9.1 dell'odierna seduta del Consiglio

□ **all'unanimità/a maggioranza**

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo *"Problemi di ottimizzazione in Economia e Finanza"* presentata dal prof. Fabio Antonelli, per un costo totale pari ad euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 12.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.MATEMATICA**
- Euro 12.000,00 **04CONS.INTERMATHS**

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

9.2.2 Richiesta attivazione Assegno di ricerca dal titolo *"Modellazione di sistemi autonomi ethical-aware"* – responsabile prof. Marco Autili

Il prof. Autili ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5163 in data odierna con l'utilizzo del finanziamento assegni di ricerca di Ateneo per l'anno 2023 per i primi nove mesi per un importo di euro 18.000,00. Le altre mensilità saranno finanziate dalle somme disponibili sul progetto CONNECTPA da lui stesso coordinato per un importo pari ad euro 6.000,00.

Il prof. Autili ha indicato come requisito per l'accesso il possesso della Laurea Magistrale in Filosofia e Comunicazione (Classe LM-92 - Classe delle lauree magistrali in Teorie della Comunicazione) in quanto attesta il conseguimento delle competenze richieste dal progetto sia nel settore INF/01 che nel settore M-FIL/02.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo complessivo di 24.000,00 euro.

Titolo del Progetto: *Modellazione di sistemi autonomi ethical-aware*

SSD: INF/01 - Informatica

Altri SSD interessati: M-FIL/02 - Logica e filosofia della scienza

Responsabile del Progetto: prof. Marco Autili

Requisiti: Laurea Magistrale in Filosofia e Comunicazione (Classe LM-92 - Classe delle lauree magistrali in Teorie della Comunicazione) corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 18.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INFORMATICA**
- Euro 6.000,00 **04 04PUB.POR-FESR-CONNECTPA**

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

Breve descrizione della ricerca: Le attività si inquadrano nel contesto del progetto EXOSOUL.

Al giorno d'oggi, interagiamo continuamente con i sistemi software, ad esempio, utilizzando dispositivi mobili, nelle case intelligenti o a bordo di un'auto. Questi sistemi sono sempre più autonomi grazie all'uso diffuso delle tecnologie di Intelligenza Artificiale e il loro impatto sulla sfera sociale, economica e politica sta diventando sempre più evidente.

Gli esseri umani dovrebbero essere supportati nel controllo dell'autonomia di tali sistemi consentendo loro di assumere il controllo operativo del sistema quando lo ritengono necessario o assicurando che le decisioni dei sistemi siano conformi alle loro preferenze etiche, senza violare regolamenti e leggi.

EXOSOUL affronta questa sfida proponendo l'utilizzo di un esoscheletro software che consente agli utenti di esprimere le proprie preferenze morali e di regolare l'autonomia del sistema e i relativi protocolli di interazione, in modo ethical-aware.

Breve descrizione della ricerca in inglese: The research activity will be carried on within the context of the EXOSOUL project. Nowadays, citizens continuously interact with software systems, e.g., by using a mobile device, in their smart homes, or from on board of a car. These systems are more and more autonomous thanks to the widespread use of AI technologies and their impact on the social, economic, and political spheres is becoming evident.

Humans should be supported in controlling the system's autonomy by enabling them to take the operational control of the system when they feel that it would be necessary or by assuring that the systems' decisions comply with their ethical preferences, without violating regulations and laws.

EXOSOUL approaches the challenge by empowering users with a software exoskeleton, which enables users to express their moral preferences and to adjust the system's autonomy and the related interaction protocols, in an ethical-aware manner.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo "*Modellazione di sistemi autonomi ethical-aware*" presentata dal prof. Marco Autili

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

VISTA la propria delibera di cui al punto 9.1 dell'odierna seduta del Consiglio

□ **all'unanimità/a maggioranza**

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo "*Modellazione di sistemi autonomi ethical-aware*" presentata dal prof. Marco Autili, per un costo totale pari ad euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 18.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INFORMATICA**
- Euro 6.000,00 **04 04PUB.POR-FESR-CONNECTPA**

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

9.2.3 Richiesta attivazione Assegno di ricerca dal titolo "Sensing distribuito per applicazioni basate su tecnologie Software Defined Radio" – responsabile prof. Fabio Graziosi

Il prof. Fabio Graziosi ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5150 in data odierna con l'utilizzo del finanziamento assegni di ricerca di Ateneo per l'anno 2023 per i primi sei mesi per un importo di euro 12.000,00. Le altre mensilità saranno finanziate dalle somme accantonate sul Progetto TAS-RINALDI, coordinato dalla dott.ssa Rinaldi e dal dott. Pomante, che autorizzano la spesa pari a 12.000,00.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo complessivo di 24.000,00 euro.

Titolo del Progetto: Sensing distribuito per applicazioni basate su tecnologie Software Defined Radio

SSD: ING-INF/03 - Telecomunicazioni

Altri SSD interessati: ING-INF/01 - Elettronica

Responsabile del Progetto: prof. Fabio Graziosi

Requisiti: Laurea Magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni (classe LM-27), oppure in Ingegneria Elettronica (classe LM-29), corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 12.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INGEGNERIA**
- Euro 12.000,00 **04CT.TAS-RINALDI**

Breve descrizione della ricerca: L'attività di ricerca affronterà la programmazione e il controllo di dispositivi distribuiti in tecnologia SDR con lo scopo di analizzare le caratteristiche della rete a cui sono connessi, sia essa LAN o WAN, ottenere la miglior sincronizzazione possibile, e in conseguenza, definire i servizi, performance in termini di sensing, realizzabili in dipendenza della QoS, data-rate e tempi di ritardo, della rete di comunicazione.

Breve descrizione della ricerca in inglese: The research activity will address the programming and control of distributed devices based on SDR technology; the aim is to analyze the characteristics of the network to which the devices are connected, in LAN and WAN contexts, in order to obtain the best synchronization, and consequently define the sensing services performance achievable depending on the QoS, data-rate and delay times of the communication network.

Il Consiglio,

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo *"Sensing distribuito per applicazioni basate su tecnologie Software Defined Radio"* presentata dal prof. Fabio Graziosi

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

VISTA la propria delibera di cui al punto 9.1 dell'odierna seduta del Consiglio

□ **all'unanimità/a maggioranza**

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo *"Sensing distribuito per applicazioni basate su tecnologie Software Defined Radio"* presentata dal prof. Fabio Graziosi, per un costo totale pari ad euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 12.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INGEGNERIA**
- Euro 12.000,00 **04CT.TAS-RINALDI**

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

*_*_*_*_*_*_*_*_*_*

9.2.4 Richiesta attivazione Assegno di ricerca dal titolo *"Convertitori polifase e tolleranti ai guasti per applicazioni "Full electric aircraft"*" – responsabile prof. Carlo Cecati

Il prof. Carlo Cecati ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5151 in data odierna con l'utilizzo del finanziamento assegni di ricerca di Ateneo per l'anno 2023 per i primi sei mesi per un importo di euro 16.000,00. Le altre mensilità saranno finanziate dalle somme accantonate sul Progetto PRIN 2017 Cecati per un costo di 8.000,00.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo complessivo di 24.000,00 euro.

Titolo del Progetto: *Convertitori polifase e tolleranti ai guasti per applicazioni "Full electric aircraft"*

SSD: ING-IND/32- Convertitori, macchine e azionamenti elettrici

Responsabile del Progetto: prof. Carlo Cecati

Requisiti: Dottorato di ricerca in Ingegneria Elettronica o Elettrica o Information and Communication Technologies o titolo straniero equivalente

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 16.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INGEGNERIA**
- Euro 8.000,00 **04PRIN17.CECATI**

Breve descrizione della ricerca: Il progetto per cui viene richiesto l'assegno mira a contribuire allo studio di soluzioni per la realizzazione di gruppi di propulsione per velivoli completamente elettrici a decollo e ad atterraggio orizzontali o verticali, adatti al trasporto di passeggeri e/o merci. L'assegnista dovrà studiare, anche mediante Spice, e successivamente sviluppare circuiti elettronici di potenza e relativi software realtime per test di laboratorio del prototipo di powertrain.

9.2 Richiesta attivazione Assegni di Ricerca con utilizzo finanziamento di Ateneo 2023

Breve descrizione della ricerca in inglese: The project aims to study solutions suitable for the development of electric propulsion units for full electric aircrafts suitable for passengers and cargo transportation. The research fellow will be required to study, even using Spice, and develop power converter circuits and related real-time software for laboratory testing of the powertrain.

Il Consiglio,

- VISTA** la Legge del 30.12.2010, n. 240
VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila
VISTO il Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca
VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo "*Convertitori polifase e tolleranti ai guasti per applicazioni "Full electric aircraft"*" presentata dal prof. Carlo Cecati
VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79
ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca
VISTA la propria delibera di cui al punto 9.1 dell'odierna seduta del Consiglio

□ **all'unanimità/a maggioranza**

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca dal titolo "*Convertitori polifase e tolleranti ai guasti per applicazioni "Full electric aircraft"*" presentata dal prof. Carlo Cecati, per un costo totale pari ad euro 24.000,00 così finanziato:

- Euro 16.000,00 **04ATE2023.ASSEGNI.INGEGNERIA**
- Euro 8.000,00 **04PRIN17.CECATI**

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.3 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Identificazione di pattern di sostenibilità a supporto della progettazione di, e migrazione verso, sistemi a microservizi”* – prof. Henry Muccini

Il prof. Henry Muccini ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca biennale, acquisita al prot. n. 4391 del 04 ottobre 2022, finanziato dai fondi disponibili sul Progetto CHOReVOLUTION di cui sono responsabili i proff. Autili e Tivoli che autorizzano la spesa.

Tale assegno è richiesto per una durata di due anni, eventualmente rinnovabile, per un costo annuale di euro 24.000,00 e totale di euro 48.000,00

Titolo del Progetto: *Identificazione di pattern di sostenibilità a supporto della progettazione di, e migrazione verso, sistemi a microservizi*

SSD: ING-INF/05 - Sistemi di elaborazione delle informazioni

Altri SSD interessati: INF/01- Informatica

Responsabili del Progetto: prof. Henry Muccini

Requisiti: Laurea Magistrale in Informatica (Classe LM-18) corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca.

Durata: due anni (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Progetto CHOReVOLUTION

Breve descrizione della ricerca: I software design patterns sono soluzioni riutilizzabili per risolvere problematiche tipiche in un determinato contesto di sviluppo. Molto è stato fatto sull'argomento e varie soluzioni sono state create per aree di interesse specifiche. Tuttavia, molto poco è stato studiato nel contesto dei design patterns volti al miglioramento della sostenibilità del software. Lo scopo principale di questa ricerca consiste nell'identificare, documentare e valutare empiricamente pattern (ed anti-pattern) di sostenibilità del software. Tali pattern verranno successivamente utilizzati come linea guida per progettare e sviluppare applicazioni a microservizi più sostenibili, nonché nella migrazione di sistemi legacy verso sistemi a microservizi.

Il piano di lavoro per questa ricerca è il seguente:

- analisi dello stato dell'arte su pattern e anti-pattern di sostenibilità del software;
- identificazione di pattern ed anti-pattern di sostenibilità;
- evidenza empirica sul loro valore;
- applicazione di pattern ed anti-pattern di sostenibilità alla progettazione di applicazioni a microservizi;
- applicazione di pattern ed anti-pattern di sostenibilità nella migrazione da sistemi legacy a microservizi.

Breve descrizione della ricerca in inglese: Software design patterns are reusable solutions to a commonly occurring problem within a given context. Much has been done on the topic, and dedicated solutions have been created for specific areas of interest. However, very little is known about “sustainability” patterns, that are, reusable solutions that may improve the software sustainability. The main purpose of this research is to identify, document, and empirically evaluate software sustainability patterns (and anti-patterns). Those patterns will be successively used as a guideline to design and develop more sustainable microservice applications, as well as in the migration process from legacy to microservice.

The workplan for this research is as follow:

- state of the art analysis of software sustainability patterns and anti-patterns;

9.3 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Identificazione di pattern di sostenibilità a supporto della progettazione di, e migrazione verso, sistemi a microservizi”* – prof. Henry Muccini

- identification of sustainability patterns and anti-patterns;
- empirical evidence on their value;
- application of sustainability patterns and anti-patterns to microservice applications design;
- application of sustainability patterns and anti-patterns in the migration process from legacy to microservices

Il Consiglio,

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo *“Identificazione di pattern di sostenibilità a supporto della progettazione di, e migrazione verso, sistemi a microservizi”* presentata dal prof. Henry Muccini

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

all'unanimità/a maggioranza

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca biennale da titolo *“Identificazione di pattern di sostenibilità a supporto della progettazione di, e migrazione verso, sistemi a microservizi”* presentata dal prof. Henry Muccini, per un costo annuale pari ad euro 24.000,00 e totale di 48.000,00 a valere sul Progetto CHOREVOLUTION.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.4 Approvazione relazione attività Assegno di Ricerca dott. Graziano Stivaletta – prof. Marco Di Francesco

Il prof. Marco Di Francesco, con nota acquisita al prot. n. 4945 in data 04 novembre 2022, ha inviato la relazione finale inerenti le attività dell'assegno di ricerca dal titolo *"Approssimazione particellare deterministica per equazioni di trasporto non-lineare su reti con applicazioni al traffico stradale e pedonale"* attribuito al dott. Graziano Stivaletta con contratto repertorio n. 177/2021, prot. n. 3836 del 26.10.2021 per il periodo 01.11.2021 – 31.10.2022, interrotto anticipatamente per la presa servizio in qualità di docente scuola.

Il prof. Di Francesco, in qualità di responsabile scientifico dell'attività di ricerca, esprime il seguente giudizio: *Nonostante la cessazione anticipata del contratto, il dott. Stivaletta ha portato avanti in modo soddisfacente l'attività relativa al progetto, concludendo un lavoro precedentemente iniziato e collaborando all'avvio di un nuovo progetto. Ritengo molto buono il lavoro svolto."*

Il Presidente dà lettura della relazione, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

- VISTO** il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca
- VISTO** il Contratto di collaborazione alla ricerca repertorio n. 177/2021, prot. n. 3836 del 26.10.2021 dal titolo: *Approssimazione particellare deterministica per equazioni di trasporto non-lineare su reti con applicazioni al traffico stradale e pedonale*, stipulato con il dott. Graziano Stivaletta per il periodo 01.11.2021 – 31.08.2022
- VISTA** la relazione presentata dal dott. Graziano Stivaletta
- SENTITO** il giudizio positivo espresso dal prof. Marco Di Francesco sull'attività di ricerca svolta dal dott. Stivaletta

all'unanimità/a maggioranza

approva la relazione presentata dal dott. Graziano Stivaletta, titolare dell'assegno di ricerca dal titolo *"Approssimazione particellare deterministica per equazioni di trasporto non-lineare su reti con applicazioni al traffico stradale e pedonale"* per il periodo 01.11.2021 – 31.08.2022, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Report on the research activity

Graziano Stivaletta

Title: Deterministic particle approximation for nonlinear transport equations on networks with applications on traffic and pedestrian flows

Scientific director: Prof. Marco Di Francesco

During this year, I focused my research activity on the approximation of different nonlinear transport equations via particle schemes of the follow-the-leader type.

As a first model, in collaboration with Marco Di Francesco, we concluded in [2] the analysis of the follow-the-leader particle approximation scheme for the Cauchy problem

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ \rho(x, 0) = \bar{\rho}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

where $\bar{\rho}$ is a non-negative compactly supported L^∞ initial datum and $f(\rho) := \rho v(\rho)$ is a C^1 concave flux.

The approximation procedure works as follows. Given $\bar{\rho} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\bar{\rho} \geq 0$, we consider a suitable “atomisation” of $\bar{\rho}$ for large $n \in \mathbb{N}$, namely a suitable set of ordered particles $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{R}$ such that the piecewise constant function

$$\bar{\rho}^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i)} \mathbf{1}_{[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})}(x)$$

converges to $\bar{\rho}$ as $n \rightarrow +\infty$ in a proper functional set. Considering a monotone decreasing velocity field v , the evolution of the particles $x_0, \dots, x_n$ is given by the *follow-the-leader* system

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v\left(\frac{1}{n(x_{i+1} - x_i)}\right), & i = 0, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = v(0). \end{cases}$$

As v is monotone decreasing, (1) can be seen as a first order model for *traffic flow*, in which the vehicles’ speed decreases with respect to the density of the vehicles ρ .

This model is already known to provide convergence of a suitable sequence of approximate density $\{\rho^n\}_n$ towards the entropy solution ρ to the

corresponding Cauchy problem. In [2] we provided two novel contributions to this theory. First, we prove that the one-sided Lipschitz condition

$$\frac{v(\rho^n(x_{i+1}(t), t)) - v(\rho^n(x_i(t), t))}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} \leq \frac{1}{t} \quad (2)$$

is a “discrete version of an entropy condition”; more precisely, under fairly general assumptions on f we show that the continuum version $(f(\rho)/\rho)_x \leq 1/t$ of condition (2) allows to select a unique weak solution, despite $(f(\rho)/\rho)_x \leq 1/t$ is apparently weaker than the classical Oleinik-Hoff one-sided Lipschitz condition $f'(\rho)_x \leq 1/t$. A byproduct of it is that the entropy condition is *encoded* in the particle scheme *prior* to the many-particle limit, which was never proven before. Second, we prove that in case $f(\rho) = \rho(A - \rho^\gamma)$ the one-sided Lipschitz condition can be *improved* to a discrete version of the classical (and “sharp”) Oleinik-Hoff condition.

As a second model, in [1] we are considering the follow-the-leader particle approximation scheme for a nonlinear transport equation with a discontinuous space depending flux. This model can be formulated, in case the discontinuity is at the origin, as

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v(\rho)\Phi(x))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(x, 0) = \bar{\rho}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

where the function $\Phi(x)$ is given by

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Phi_l(x), & \text{if } x < 0, \\ \Phi_r(x), & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

The microscopic description of the system is given by the follow-the-leader system

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t)\Phi_l(x_i(t)) & \text{if } x_i(t) < 0, \ i \in \{0, \dots, n\}, \\ \dot{x}_i(t) = v_i(t)\Phi_r(x_i(t)) & \text{if } x_i(t) \geq 0, \ i \in \{0, \dots, n\}, \\ x_i(0) = \bar{x}_i, \end{cases} \quad (4)$$

where

$$v_i(t) := \begin{cases} v(R_i(t)) & \text{if } \Phi \geq 0, \\ v(R_{i-1}(t)) & \text{if } \Phi < 0, \end{cases}$$

and $\bar{x}_i$ can be assigned through a suitable atomisation of $\bar{\rho}$.

The aim is to prove some existence results in the framework of entropy solutions, taking into account different assumptions on the potential Φ and

on the velocity map v . Starting from a discrete maximum principle with a careful treatment of the times t_h when a particle crosses the discontinuity at $x = 0$, we conjecture that the approximating density satisfies a uniform bound for the total variation, arbitrarily away from the discontinuity: this local compactness argument permits to circumvent the possible absence of global BV bounds, in order to obtain existence of entropy solutions for the macroscopic system.

References

- [1] M. Di Francesco and G. Stivaletta. On the follow-the-leader approximation of nonlinear transport equations with discontinuous flux. *In preparation*.
- [2] M. Di Francesco and G. Stivaletta. The one-sided Lipschitz condition in the follow-the-leader approximation of scalar conservation laws. *To appear in Journal of Hyperbolic Differential Equations*.

9.5 Approvazione relazione attività Assegno di Ricerca dott. Roberto Civino – prof. Norberto Gavioli

Il prof. Norberto Gavioli, con nota acquisita al prot. n. 4940 in data 04 novembre 2022, ha inviato la relazione finale inerenti le attività dell'assegno di ricerca dal titolo *"Tecniche algebriche di crittoanalisi per la sicurezza"* attribuito al dott. Roberto Civino con contratto repertorio n. 46/2022, prot. n. 2041 del 25.05.2022 per il periodo 01.06.2022 – 31.05.2023, interrotto anticipatamente per la presa servizio in qualità di RTD lettera a) presso il nostro Dipartimento.

Il prof. Gavioli, in qualità di responsabile scientifico dell'attività di ricerca, esprime il seguente giudizio: *"Ottimo: nel periodo in oggetto, Il dottor Civino ha collaborato attivamente alle attività del centro di eccellenza ExEmerge ed ha contribuito alla preparazione di diversi prodotti di ricerca perfettamente in accordo con il tema del suo assegno, sia con altri autori che in collaborazione con il sottoscritto. Propongo che la sua relazione venga accolta pienamente dal Consiglio di Dipartimento."*

Il Presidente dà lettura della relazione, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

- VISTO** il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca
VISTO il Contratto di collaborazione alla ricerca repertorio n. 46/2022, prot. n. 2041 del 25.05.2022 dal titolo: *Tecniche algebriche di crittoanalisi per la sicurezza*, stipulato con il dott. Roberto Civino per il periodo 01.06.2022 – 31.10.2022
VISTA la relazione presentata dal dott. Roberto Civino
SENTITO il giudizio positivo espresso dal prof. Norberto Gavioli sull'attività di ricerca svolta dal dott. Civino

all'unanimità/a maggioranza

approva la relazione presentata dal dott. Roberto Civino, titolare dell'assegno di ricerca dal titolo *Tecniche algebriche di crittoanalisi per la sicurezza* per il periodo 01.06.2022 – 31.10.2022, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Report di attività scientifica

Roberto Civino

Università degli studi dell'Aquila

Di seguito la descrizione dell'attività di ricerca svolta nel periodo dal 1° giugno 2022 al 1° novembre 2022 nell'ambito del progetto di ricerca¹ denominato “*Tecniche algebriche di crittoanalisi per la sicurezza*” presso il DISIM dell'Università dell'Aquila, cofinanziato da ExEmerge e avente per responsabile scientifico il prof. Norberto Gavioli.

A decorrere della presa di servizio come ricercatore a tempo determinato RTD-a presso lo stesso dipartimento avvenuta il 2 novembre 2022, lo scrivente rinuncia al predetto assegno di ricerca.

1 Attività di ricerca

L'attività di ricerca svolta nei mesi da giugno a ottobre ha riguardato innanzitutto la revisione di due lavori prodotti in precedenza, che sono stati pubblicati nella loro forma finale come meglio dettagliato in Sez. 2.1, e la seconda revisione di un articolo già inviato in precedenza (cf. (1) in Sez. 2.2). Il problema di ricerca sul comportamento della catena di normalizzanti già descritto nelle precedenti relazioni è ancora in corso di studio, sia dal punto di vista della comprensione dei legami con la teoria dei gruppi e delle algebre (con due preprint in fase di stesura), sia dal punto di vista combinatorio per quanto riguarda il legame con la teoria delle partizioni di interi. A tal proposito, il problema della classificazione delle partizioni non raffinabili massimali è stato completato, e il lavoro ottenuto in collaborazione con R. Aragona e L. Campioni è stato inviato per la revisione (cf. (2) in Sez. 2.2). Assieme a N. Gavioli e V. Fedele è inoltre stato avviato un progetto di ricerca volto allo studio del gruppo di automorfismi e delle classi di isomorfismo di bi-brace binari, con risvolti utili nell'applicazione alla crittanalisi di cifrari a blocchi.

2 Produzione scientifica

2.1 Articoli pubblicati

1. R. Aragona, R. Civino, and F. Dalla Volta: *On the primitivity of the AES key-schedule*, **Journal of Algebra and Its Applications**.

Abstract. The key-scheduling algorithm in the AES is the component responsible for selecting from the master key the sequence of round keys to be

¹ Assegno di ricerca ex. art. 22 della legge 240/2010

xor-ed to the partially encrypted state at each iteration. We consider here the group Γ generated by the action of the AES-128 key-scheduling operation, and we prove that the smallest group containing Γ and all the translations of the message space is primitive. As a consequence, we obtain that no linear partition of the message space can be invariant under its action.

2. R. Aragona, L. Campioni, R. Civino and M. Lauria: *On the maximal part in unrefinable partitions of triangular numbers*, **Aequationes mathematicae**.

Abstract. A partition into distinct parts is refinable if one of its parts a can be replaced by two different integers which do not belong to the partition and whose sum is a , and it is unrefinable otherwise. Clearly, the condition of being unrefinable imposes on the partition a non-trivial limitation on the size of the largest part and on the possible distributions of the parts. We prove a $O(n^{1/2})$ -upper bound for the largest part in an unrefinable partition of n , and we call maximal those which reach the bound. We show a complete classification of maximal unrefinable partitions for triangular numbers, proving that if n is even there exists only one maximal unrefinable partition of $n(n+1)/2$, and that if n is odd the number of such partitions equals the number of partitions of $\lceil n/2 \rceil$ into distinct parts. In the second case, an explicit bijection is provided.

2.2 Articoli inviati per la revisione

1. R. Aragona, L. Campioni, R. Civino and M. Lauria: *Verification and generation of unrefinable partitions*, submitted to **Information Processing Letters**.

Abstract. Unrefinable partitions are a subset of partitions into distinct parts which satisfy an additional unrefinability property. More precisely, no parts of such partitions can be written as the sum of different integers which are not parts. We address in this paper the algorithmic aspects related to unrefinable partitions, such as testing whether a given partition is unrefinable or not and enumerating all the partitions whose sum is a given number. We design two algorithms to solve the two mentioned problems and we discuss their complexity.

2. R. Aragona, L. Campion and R. Civino : *The number of maximal unrefinable partitions*, submitted to **Journal of the London Mathematical Society**.

Abstract. This paper completes the classification of maximal unrefinable partitions, extending a previous work of Aragona et al. devoted only to the case of triangular numbers. We show that the number of maximal unrefinable partitions of an integer coincides with the number of suitable partitions into distinct parts, depending on the distance from the successive triangular number.

3 Didattica

Durante il periodo già menzionato si sono svolte le seguenti attività didattiche:

- Preparazione del materiale didattico e docenza del corso *Crittografia per smartphone*, organizzato dall'**Università di Trento**, Ottobre 2022.

4 Conferenze e attività

Ho partecipato ai seguenti eventi:

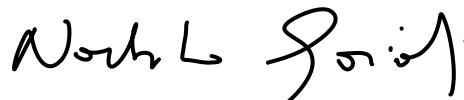
- Organizzazione di Street Science Pop-Up - Node e forme pazze in matematica, University of L'Aquila, Italy, 30 Settembre
- Combinatorics, Computing, Group Theory and Applications in South Florida, Deerfield Beach, Florida, 14 - 21 Agosto (online)
- The Algebra of the Yang-Baxter Equation, Bedlewo, Poland, 10 - 16 Luglio
- Ischia Group Theory 2022, Ischia, 20 - 25 Giugno

Roma, 3 novembre 2022

Roberto Civino



Il responsabile scientifico del progetto
Norberto Gavioli



9.6 Approvazione relazione attività Assegno di Ricerca dott. Massimiliano Palmiero – prof. Marco Autili

Il prof. Marco Autili, con nota acquisita al prot. n. 4767 in data 14 ottobre 2022, ha inviato la relazione finale inerenti le attività dell'assegno di ricerca dal titolo *"Progettazione e Valutazione di una indagine conoscitiva sulla etica digitale di generazione Z"* attribuito al dott. Massimiliano Palmiero con contratto repertorio n. 127/2022, prot. n. 4256 del 26.09.2022 per il periodo 01.09.2022 – 31.08.2023, interrotto anticipatamente in data 28.10.2022.

Il prof. Marco Autili, in qualità di responsabile scientifico dell'attività di ricerca, esprime un giudizio positivo sulle attività svolte.

Il Presidente dà lettura della relazione, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO il Contratto di collaborazione alla ricerca repertorio n. 127/2022, prot. n. 4256 del 26.09.2022 dal titolo *"Progettazione e Valutazione di una indagine conoscitiva sulla etica digitale di generazione Z"*, stipulato con il dott. Massimiliano Palmiero per il periodo 01.09.2022 – 31.10.2022

VISTA la relazione presentata dal dott. Massimiliano Palmiero

SENTITO il giudizio positivo espresso dal prof. Marco Autili sull'attività di ricerca svolta dal dott. Palmiero

all'unanimità/a maggioranza

approva la relazione presentata dal dott. Massimiliano Palmiero, titolare dell'assegno di ricerca dal titolo *"Progettazione e Valutazione di una indagine conoscitiva sulla etica digitale di generazione Z"* per il periodo 01.06.2022 – 31.10.2022, che viene allegata al presente verbale per formarne parte integrante.



Oggetto: Relazione finale assegno di ricerca:

Assegnista: Massimiliano Palmiero

Durata assegno: dal 01-09-2022 al 27-10-2022

Importo Assegno: € 30.000 lordi

Tipologia assegno: di progetto - Fondo 04INTERMATH

Titolo del progetto: Progettazione e valutazione di una indagine conoscitiva sulla etica digitale di generazione Z

Responsabile del progetto: Professor Marco Autili

Settore Scientifico Disciplinare Prevalente: M-PSI/01 – Psicologia Generale

Altri settori scientifico-disciplinari: SPS/08, M-FIL/02, INF/01

Relazione

L'assegno di ricerca s'inserisce nel più ampio progetto EXOSOUL e ha avuto la finalità di profilare un campione rappresentativo appartenente alla generazione Z (nati dal 1997 al 2010) in termini di valori, credenze e atteggiamenti di natura etica, allo scopo di predire il comportamento digitale. Nello specifico, il progetto EXOSOUL si prefigge l'obiettivo di creare un software (esoscheletro) che possa mediare l'interazione degli utenti con il mondo digitale sulla base di profili etici. In quest'ottica, l'esoscheletro, rappresenta un mediatore etico che permette di proteggere gli utenti, soprattutto in relazione alla privacy digitale.

L'attività di ricerca è consistita nella profilazione di natura etica già in atto con il precedente assegno di ricerca. Quindi, sono state effettuate nuove analisi statistiche sulla base di nuovi dati raccolti attraverso un diverso questionario mirato a misurare aspetti di etica più dettagliati e utilizzando come misura del comportamento digitale la scala di 'consapevolezza sulla sicurezza informativa'. La cluster analysis ha evidenziato una migliore profilazione etica, con la soluzione a 3 cluster partendo da un

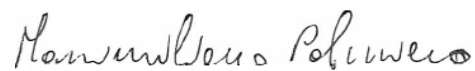


approccio prettamente data-driven, e con la soluzione a 4 cluster più attendibile partendo da un approccio model-driven. Entrambe le soluzioni sono risultate in grado di predire il comportamento digitale entro certi limiti.

Inoltre, il sottoscritto ha continuato a lavorare alla review sistematica relativa alla categorizzazione della privacy. La review è in fase di submission.

Luogo e data: L'Aquila, 21/10/2022

Firma Assegnista



Firma responsabile progetto



9.7 Nomina Commissione Assegno di Ricerca Bando n. 411/2022 – proff. Vittorio Cortellessa e Antinisca Di Marco

Il Presidente comunica che in data 11 novembre 2022 sono scaduti i termini di presentazione delle domande per partecipare alla selezione per l'attribuzione di n. 1 Assegno di ricerca dal titolo "*Tecniche innovative di visual analytics per la diagnosi e la soluzione di problemi di qualità nei sistemi software*" responsabili scientifici proff. Cortellessa e Di Marco, di cui al bando repertorio n. 411/2022.

I responsabili, con e-mail del 09.11.2022, hanno proposto la seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

□ **Il Consiglio,**

□

□ **VISTO** il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

□ **VISTO** il D.d.D. repertorio n. 411/2022, prot. n. 4487 del 07.10.2022 con il quale è stata indetta una selezione pubblica, per titoli e colloquio, per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo *Tecniche innovative di visual analytics per la diagnosi e la soluzione di problemi di qualità nei sistemi software* – RR.SS. proff. Cortellessa e Di Marco

□ **VISTA** la Commissione proposta dei Responsabili scientifici

□

all'unanimità/a maggioranza

□

□ **approva** la composizione della Commissione Esaminatrice della selezione pubblica di cui al D.d.D. repertorio n. 411/2022 per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo "*Tecniche innovative di visual analytics per la diagnosi e la soluzione di problemi di qualità nei sistemi software*" nella seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

□ **La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.**

9.8 Nomina Commissione Assegno di Ricerca Bando n. 413/2022 – prof. Davide Di Ruscio

Il Presidente comunica che in data 12 novembre 2022 sono scaduti i termini di presentazione delle domande per partecipare alla selezione per l'attribuzione di n. 1 Assegno di ricerca dal titolo "*Definizione di sistemi di raccomandazione a supporto dello sviluppo di sistemi IoT*", Responsabile Scientifico prof. Davide Di Ruscio, di cui al bando repertorio n. 413/2022.

Il responsabile, con e-mail del 09.11.2022, ha proposto la seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

Il Consiglio,

VISTO il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO il D.d.D. repertorio n. 413/2022, prot. n. 4516 del 10.10.2022 con il quale è stata indetta una selezione pubblica, per titoli e colloquio, per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo *Definizione di sistemi di raccomandazione a supporto dello sviluppo di sistemi IoT* – R.S. prof. Davide Di Ruscio

VISTA la Commissione proposta del Responsabile scientifico con mail del 09.11.2022

all'unanimità/a maggioranza

approva la composizione della Commissione Esaminatrice della selezione pubblica di cui al D.d.D. repertorio n. 413/2022 per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo "*Definizione di sistemi di raccomandazione a supporto dello sviluppo di sistemi IoT*" nella seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.9 Nomina Commissione Assegno di Ricerca Bando n. 415/2022 – prof. Davide Di Ruscio

Il Presidente comunica che in data 12 novembre 2022 sono scaduti i termini di presentazione delle domande per partecipare alla selezione per l'attribuzione di n. 1 Assegno di ricerca dal titolo "*Piattaforme low-code per supportare lo sviluppo di sistemi IoT ML-intensive*", Responsabile Scientifico prof. Davide Di Ruscio, di cui al bando repertorio n. 415/2022.

Il responsabile, con e-mail del 09.11.2022, ha proposto la seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

Il Consiglio,

VISTO il vigente Regolamento per il conferimento di assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO il D.d.D. repertorio n. 415/2022, prot. n. 4529 del 11.10.2022 con il quale è stata indetta una selezione pubblica, per titoli e colloquio, per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo "*Piattaforme low-code per supportare lo sviluppo di sistemi IoT ML-intensive*" – R.S. prof. Davide Di Ruscio

VISTA la Commissione proposta del Responsabile scientifico con mail del 09.11.2022

all'unanimità/a maggioranza

approva la composizione della Commissione Esaminatrice della selezione pubblica di cui al D.d.D. repertorio n. 415/2022 per il conferimento di n. 1 assegno di ricerca dal titolo *Piattaforme low-code per supportare lo sviluppo di sistemi IoT ML-intensive* nella seguente composizione:

Prof.ssa Antinisca Di Marco	P.A.	INF/01	Presidente
Prof. Davide di Ruscio	P.A.	INF/01	Membro
Dott. Juri Di Rocco	RTDa	INF/01	Segretario

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.10 Richiesta attivazione n. 2 Borse di Ricerca *post-lauream* dal titolo "*Analisi di architetture di rete a supporto di servizi ad alta affidabilità*" – prof. Fabio Graziosi

Il prof. Fabio Graziosi, con nota acquisita al protocollo n. 5039 in data 09.11.2022, ha presentato richiesta di emissione di un bando per il conferimento di due borse di ricerca dal titolo "*Analisi di architetture di rete a supporto di servizi ad alta affidabilità*" che lo vedono come Responsabile Scientifico.

L'importo della singola borsa è pari ad euro 7.200,00. Le borse avranno una durata di 6 mesi e saranno finanziate con i fondi del **Progetto di Ateneo CAVIDOTTI_SCUOLE** sulla **C.A.04.03.01.05.03 Altre borse di studio** coordinato dallo stesso prof. Graziosi, per un costo totale pari a euro 14.400,00.

Le borse di ricerca, eventualmente rinnovabili, saranno erogate in sei rate posticipate.

Requisito minimale:

Laurea in ambito ICT (Laurea in Informatica (classe L-31) oppure Ingegneria dell'informazione (classe L-8)) o equivalente titolo straniero (Bachelor of Technology)

Requisiti preferenziali:

Ai candidati vengono richieste competenze nell'ambito delle reti e dei servizi cloud con attenzione ai temi di affidabilità e disponibilità.

La Commissione giudicatrice proposta dal prof. Graziosi è la seguente:

Prof. Fabio Graziosi	P.O.	ING-INF/03	Presidente
Dott. Fabio Franchi	RTDa	ING-INF/03	Componente
Prof.ssa Dajana Cassioli	P.A.	ING-INF/03	Segretario

Il Consiglio,

VISTO	il vigente Regolamento per il conferimento di borse di ricerca
VISTO	il D.R. n. 504-2009 del 03.03.2009 con il quale i Direttori dei Dipartimenti sono stati delegati alla gestione e alla firma di tutti gli atti emanati per l'attribuzione delle borse di studio per attività di ricerca
VISTO	il D.R. 593/2016 del 12.06.2016 con il quale è stato rideterminato l'importo minimo della borsa di ricerca pari a €. 12.000,00 e l'importo massimo pari ad €. 22.000,00
VISTA	la richiesta del prof. Fabio Graziosi per l'emissione di un bando per il conferimento di n. 2 borse di ricerca dal titolo " <i>Analisi di architetture di rete a supporto di servizi ad alta affidabilità</i> " della durata di 6 mesi
RITENUTI	idonei i requisiti richiesti
ACCERTATA	la copertura finanziaria

all'unanimità / a maggioranza

- 1. approva** l'emissione del Bando di selezione per il conferimento di n. 2 borse di ricerca dal titolo "*Analisi di architetture di rete a supporto di servizi ad alta affidabilità*" della durata di 6 mesi, eventualmente rinnovabili, per un costo di euro 7.200,00 ognuna e totale di euro 14.400,00 a valere sul Progetto di Ateneo CAVIDOTTI_SCUOLE coordinato dal prof. Fabio Graziosi;

- 9.10 Richiesta attivazione n. 2 Borse di Ricerca *post-lauream* dal titolo "*Analisi di architetture di rete a supporto di servizi ad alta affidabilità*" – prof. Fabio Graziosi

2. nomina la seguente Commissione Giudicatrice della selezione:

Prof. Fabio Graziosi	P.O.	ING-INF/03	Presidente
Dott. Fabio Franchi	RTDa	ING-INF/03	Componente
Prof.ssa Dajana Cassioli	P.A.	ING-INF/03	Segretario

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

- 9.11 Richiesta attivazione Borsa di Ricerca *post-lauream* dal titolo "*Studio e implementazione di tecniche basate su steganografia in ambito Software Defined Radio per comunicazioni sicure*" – prof. Fabio Graziosi

Il prof. Fabio Graziosi, con nota acquisita al protocollo n. 5078 in data 11.11.022, ha presentato richiesta di emissione di un bando per il conferimento di una borsa di ricerca dal titolo "*Studio e implementazione di tecniche basate su steganografia in ambito Software Defined Radio per comunicazioni sicure*" che lo vede come Responsabile Scientifico, della durata di 6 mesi.

L'importo della borsa è pari ad euro 8.400,00 e sarà finanziato con i fondi del **Progetto di Ateneo SICURA** sulla **C.A.04.03.01.05.03 Altre borse di studio** coordinato dallo stesso prof. Graziosi.

La borsa di ricerca, eventualmente rinnovabile, verrà erogata in sei rate posticipate.

Requisito minimale:

Laurea Magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni (classe LM-27), oppure in Ingegneria Elettronica (classe LM-29) o laurea equivalente conseguita all'estero.

Ulteriori competenze:

- Conoscenza di ambienti di sviluppo e prototipazione per Software Defined Radio
- conoscenze di progettazione hardware,
- conoscenze di sistemi di elaborazione dei segnali

La Commissione giudicatrice proposta dal prof. Graziosi è la seguente:

Prof. Fabio Graziosi	P.O.	ING-INF/03	Presidente
Prof.ssa Dajana Cassioli	P.A.	ING-INF/03	Componente
Dott. Andrea Marotta	RTDa	ING-INF/03	Segretario

Il Presidente invita il Consiglio ad esprimersi in merito.

Il Consiglio,

- VISTO** il vigente Regolamento per il conferimento di borse di ricerca
- VISTO** il D.R. n. 504-2009 del 03.03.2009 con il quale i Direttori dei Dipartimenti sono stati delegati alla gestione e alla firma di tutti gli atti emanati per l'attribuzione delle borse di studio per attività di ricerca
- VISTO** il D.R. 593/2016 del 12.06.2016 con il quale è stato rideterminato l'importo minimo della borsa di ricerca pari a euro 12.000,00 e l'importo massimo pari ad euro 22.000,00
- VISTA** la richiesta del prof. Fabio Graziosi per l'emissione del Bando di selezione per il conferimento di una borsa di ricerca dal titolo "*Studio e implementazione di tecniche basate su steganografia in ambito Software Defined Radio per comunicazioni sicure*" della durata di 6 mesi
- RITENUTI** idonei i requisiti richiesti
- ACCERTATA** la copertura finanziaria

all'unanimità / a maggioranza

9.11 Richiesta attivazione Borsa di Ricerca *post-lauream* dal titolo "*Studio e implementazione di tecniche basate su steganografia in ambito Software Defined Radio per comunicazioni sicure*" – prof. Fabio Graziosi

1. **approva** l'emissione del Bando di selezione per il conferimento di una borsa di ricerca dal titolo "*Studio e implementazione di tecniche basate su steganografia in ambito Software Defined Radio per comunicazioni sicure*" della durata di 6 mesi per un costo di euro 8.4000,00 a valere sul Progetto di Ateneo SICURA, responsabile prof. Fabio Graziosi;

2. **nomina** la seguente Commissione Giudicatrice della selezione:

Prof. Fabio Graziosi	P.O.	ING-INF/03	Presidente
Prof.ssa Dajana Cassioli	P.A.	ING-INF/03	Componente
Dott. Andrea Marotta	RTDa	ING-INF/03	Segretario

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

- 9.12 Richiesta attivazione n. 2 Borse di Ricerca *post-lauream* dal titolo "Studio e implementazione di soluzioni avanzate per la dematerializzazione dei processi amministrativi" – prof. Giuseppe Della Penna

Il prof. Giuseppe Della Penna, con nota acquisita al protocollo n. 5081 in data 11.11.2022, ha presentato richiesta di emissione di un bando per il conferimento di due borse di ricerca dal titolo "*Studio e implementazione di soluzioni avanzate per la dematerializzazione dei processi amministrativi*" che lo vedono come Responsabile Scientifico.

L'importo della singola borsa è pari ad euro 10.000,00, avranno una durata di 10 mesi e saranno finanziate con i fondi del **Progetto CHOReVOLUTION** sulla **C.A.04.03.01.05.03 Altre borse di studio** coordinato dai proff. Autili e Tivoli che autorizzano la spesa per un costo totale pari a euro 20.000,00.

Le borse di studio, eventualmente rinnovabili, saranno erogate in dieci rate posticipate.

Requisito minimale:

Laurea in Informatica (classe L-31) o equivalente titolo straniero.

Requisiti preferenziali:

Esperienza sullo sviluppo di applicazioni web con tecnologie Java.

La Commissione giudicatrice proposta dal prof. Della Penna è la seguente:

Prof. Massimo Tivoli	P.O.	INF/01	Presidente
Prof. Giuseppe Della Penna	P.A.	INF/01	Componente
Dott.ssa Giovanna Melideo	R.U.	INF/01	Segretario

Il Consiglio,

VISTO	il vigente Regolamento per il conferimento di borse di ricerca
VISTO	il D.R. n. 504-2009 del 03.03.2009 con il quale i Direttori dei Dipartimenti sono stati delegati alla gestione e alla firma di tutti gli atti emanati per l'attribuzione delle borse di studio per attività di ricerca
VISTO	il D.R. 593/2016 del 12.06.2016 con il quale è stato rideterminato l'importo minimo della borsa di ricerca pari a €. 12.000,00 e l'importo massimo pari ad €. 22.000,00
VISTA	la richiesta del prof. Giuseppe Della Penna per l'emissione di un bando per il conferimento di n. 2 borse di ricerca dal titolo " <i>Studio e implementazione di soluzioni avanzate per la dematerializzazione dei processi amministrativi</i> " della durata di 10 mesi
RITENUTI	idonei i requisiti richiesti
ACCERTATA	la copertura finanziaria

all'unanimità / a maggioranza

- 1. approva** l'emissione del Bando di selezione per il conferimento di n. 2 borse di ricerca dal titolo "*Studio e implementazione di soluzioni avanzate per la dematerializzazione dei processi amministrativi*" della durata di 10 mesi, eventualmente rinnovabili, per un costo di euro 10.000,00 ognuna e totale di euro 20.000,00 a valere sul Progetto CHOReVOLUTION;
- 2. nomina** la seguente Commissione Giudicatrice della selezione:

- 9.12 Richiesta attivazione n. 2 Borse di Ricerca *post-lauream* dal titolo "Studio e implementazione di soluzioni avanzate per la dematerializzazione dei processi amministrativi" – prof. Giuseppe Della Penna

Prof. Massimo Tivoli	P.O.	INF/01	Presidente
Prof. Giuseppe Della Penna	P.A.	INF/01	Componente
Dott.ssa Giovanna Melideo	R.U.	INF/01	Segretario

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

- 9.13 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Intelligenza Artificiale e Model-Driven Engineering per un’efficiente automazione del processo DevOps in Cyber-Physical Systems”* – prof. Vittorio Cortellessa

Il prof. Vittorio Cortellessa ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5122 del 14.11.2022, finanziato dai fondi disponibili sul Progetto AIDOART di cui è responsabile lo stesso prof. Cortellessa.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo annuale di euro 24.000,00.

Titolo del Progetto: *Intelligenza Artificiale e Model-Driven Engineering per un’efficiente automazione del processo DevOps in Cyber-Physical Systems*

SSD: INF/01- Informatica

Altri SSD interessati: ING-INF/05 - Sistemi di elaborazione delle informazioni

Responsabili del Progetto: prof. Vittorio Cortellessa

Requisiti: Laurea Magistrale in Informatica (classe LM-18) o Ingegneria Informatica (classe LM-32) corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca.

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Progetto AIDOART

Breve descrizione della ricerca: L’attività di ricerca sarà svolta all’interno del progetto europeo ECSEL JU AIDOaRt (AIaugmented automation for efficient DevOps, a model-based framework for continuous development At RunTime in cyber-physical systems). I principali obiettivi della ricerca saranno:

- a) fornire un framework basato su modelli per supportare il processo continuo di ingegneria dei sistemi cyber-fisici (CPS), beneficiando dell’automazione introdotta dall’intelligenza artificiale;
- b) migliorare la corrispondente toolchain DevOps, integrando l’uso di tecniche di intelligenza artificiale (in particolare Machine Learning) in molteplici aspetti del processo di sviluppo del sistema (ad esempio, per supportare requisiti, monitoraggio, modellazione, codifica e attività di test);
- c) supportare la raccolta, la rappresentazione e la tracciabilità dei dati di runtime (come log, eventi e metriche) e modelli software (osservare), assistere nell’analisi dei dati sia storici che in tempo reale in combinazione con le informazioni di progettazione (analizzare) e supportare l’automazione delle attività della pipeline DevOps in base ai risultati dell’analisi precedente (automatizzare).

Breve descrizione della ricerca in inglese: The research will be made in the context of the ECSEL JU European Project AIDOaRt (AIaugmented automation for efficient DevOps, a model-based framework for continuous development At RunTime in cyber-physical systems). The main objectives of the research will be:

- a) to provide a model-based framework to support the continuous systems engineering process of Cyber-Physical Systems (CPSs), by benefiting from AI-augmented automation;
- b) to enhance the corresponding DevOps toolchain by integrating the use of AI techniques (notably Machine Learning) in multiple aspects of the system development process (e.g., to support requirements, monitoring, modelling, coding and testing activities);
- c) to support the collection, representation and traceability of runtime data (such as logs, events and metrics) and software models (observe), to assist in the analysis of both historical and real-time data in

- 9.13 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Intelligenza Artificiale e Model-Driven Engineering per un’efficiente automazione del processo DevOps in Cyber-Physical Systems”* – prof. Vittorio Cortellessa

combination with design information (analyze), and to support the automation of tasks of the DevOps pipeline according to the results of previous analysis (automate).

Il Consiglio

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell’Università degli Studi dell’Aquila

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo *“Intelligenza Artificiale e Model-Driven Engineering per un’efficiente automazione del processo DevOps in Cyber-Physical Systems”* presentata dal prof. Vittorio Cortellessa

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l’impiego ai fini dell’attivazione di assegni di ricerca

all’unanimità/a maggioranza

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca annuale da titolo *“Intelligenza Artificiale e Model-Driven Engineering per un’efficiente automazione del processo DevOps in Cyber-Physical Systems”* presentata dal prof. Vittorio Cortellessa, per un costo pari ad euro 24.000,00 a valere sul Progetto AIDOART.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.14 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Modelli matematici per il metabolismo e la crescita delle piante”* – dott. Michele Palladino

Il dott. Michele Palladino ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5134 del 15 novembre 2022, finanziato dai fondi disponibili sul Progetto CONS.INTERMATHS di cui è responsabile il prof. Lattanzio che autorizza la spesa.

Tale assegno è richiesto per una durata di un biennio, eventualmente rinnovabile, per un costo annuale di euro 30.000,00, poiché dato il carattere interdisciplinare della ricerca, saranno necessari profili con una già comprovata esperienza in ricerca. Il costo totale è pertanto pari ad euro 60.000,00 a valere sul progetto 04CONS.INTERMATHS

Titolo del Progetto: *Modelli matematici per il metabolismo e la crescita delle piante*

SSD: MAT/05 – Analisi matematica

Altri SSD interessati: INF/01- Informatica

Responsabili del Progetto: dott. Michele Palladino

Requisiti: Dottorato di ricerca in Matematica o Informatica corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca.

Durata: due anni (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Progetto CONS.INTERMATHS

Breve descrizione della ricerca: La ricerca verterà sull'uso di rigorosi strumenti matematici per la modellizzazione di fenomeni di fondamentale importanza per la fisiologia vegetale. In particolare, lo scopo della ricerca è di costruire modelli matematici che descrivano vari aspetti della crescita delle piante come il ciclo giorno/notte, l'uso delle risorse nel terreno (azoto, fosforo ecc.), l'incremento della biomassa, la fotosintesi e l'immagazzinamento di amido, solo per citarne alcuni. Inoltre, saranno anche di interesse le questioni relative alla comunicazione fra piante e ai meccanismi di difesa delle piante contro parassiti e patogeni esterni.

Tali modelli saranno sviluppati facendo uso di vari strumenti matematici quali le equazioni differenziali, la teoria del controllo e la teoria dei giochi.

Breve descrizione della ricerca in inglese: The research work will mainly concern the modelling of important questions in plant physiology, making use of rigorous mathematical tools. The aim of the study will be to design mathematical models describing various aspects of plant growth such as, for example, the day/night cycle, the use of soil resources (such as nitrogen, phosphorus etc.), the biomass accretion, the photosynthesis, the starch storage.

The models will be developed making use of several mathematical tools, such as differential equations, control theory and game theory.

Il Consiglio,

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

9.14 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Modelli matematici per il metabolismo e la crescita delle piante”* – dott. Michele Palladino

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo *“Modelli matematici per il metabolismo e la crescita delle piante”* presentata dal dott. Michele Palladino

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

all'unanimità/a maggioranza

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca biennale da titolo *“Modelli matematici per il metabolismo e la crescita delle piante”* presentata dal dott. Michele Palladino, per un costo annuale pari ad euro 30.000,00 e totale di euro 60.000,00 a valere sul Progetto 04CONS.INTERMATHS.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.15 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Studio di modelli evolutivi di interazione non locale mediante trasporto ottimo”* – dott.ssa Emanuela Radici

La dott.ssa Emanuela Radici ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca, acquisita al prot. n. 5135 del 15 novembre 2022, finanziato dai fondi disponibili sul Progetto CONS.INTERMATHS di cui è responsabile il prof. Lattanzio che autorizza la spesa.

Tale assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo totale di euro 24.000,00 a valere sul progetto 04CONS.INTERMATHS

Titolo del Progetto: *Studio di modelli evolutivi di interazione non locale mediante trasporto ottimo*

SSD: MAT/05 – Analisi matematica

Responsabili del Progetto: dott.ssa Emanuela Radici

Requisiti: Laurea Magistrale in Matematica e Applicazioni oppure Modellistica matematico-fisica per l'ingegneria (Classi LM-40 o LM-44) corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca.

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: Progetto CONS.INTERMATHS

Breve descrizione della ricerca: Il progetto riguarda lo studio di modelli evolutivi che descrivono la dinamica di una densità macroscopica di agenti. Le caratteristiche peculiari dei modelli considerati consisteranno nel tipo di interazione non locale tra gli agenti e l'eventuale presenza di effetti che rallentano o addirittura impediscono situazioni di congestione. La natura individual-based del modello permette una descrizione del fenomeno a diverse scale, sia quella microscopica che quella macroscopica. Per questo motivo le tecniche che si utilizzeranno spazieranno dalle teorie continue del trasporto ottimo e dei flussi gradiente, fino ai metodi di approssimazione dal discreto al continuo.

Breve descrizione della ricerca in inglese: The project concerns the study of evolutive models describing the dynamics of a macroscopic density of agents. The peculiar features of the considered models consist in the type of nonlocal interaction between the agents and the eventual presence of effects which slow down or even prevent congestion situations. The individual-based nature of the model allows for a description of the phenomenon at several scales, as the microscopic and the macroscopic ones. For this reason, the required techniques will range from the “continuous” theories of optimal transport and gradient flows to the discrete-to-continuum approximating methods.

Il Consiglio,

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

VISTO la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca da titolo *“Studio di modelli evolutivi di interazione non locale mediante trasporto ottimo”* presentata dalla dott.ssa Emanuela Radici

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

9.15 Richiesta attivazione Assegno di Ricerca dal titolo *“Studio di modelli evolutivi di interazione non locale mediante trasporto ottimo”* – dott.ssa Emanuela Radici

all'unanimità/a maggioranza

approva la richiesta di attivazione di un assegno di ricerca annuale da titolo *“Studio di modelli evolutivi di interazione non locale mediante trasporto ottimo”* presentata dalla dott.ssa Emanuela Radici, per un costo totale di euro 24.000,00 a valere sul Progetto 04CONS.INTERMATHS.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

9.16 Richiesta attivazione n. 3 Assegni di Ricerca dal titolo *“Modelli matematici in sismologia e simulazione numerica in strutture di calcolo parallelo”* – prof. Bruno Rubino

Il prof. Bruno Rubino ha presentato la scheda per la richiesta di attivazione di n. 3 Assegni di ricerca, acquisita al prot. n. 5138 del 15 novembre 2022, finanziato dai fondi disponibili sul Progetto CONS.INTERMATHS di cui è responsabile il prof. Corrado Lattanzio che autorizza la spesa.

Ogni assegno è richiesto per una durata di un anno, eventualmente rinnovabile, per un costo annuale di euro 30.000,00, data la complessità derivante dal contesto interdisciplinare e inter-ateneo delle attività di ricerca da svolgere, che necessitano da parte dell'assegnista una spiccata capacità di coordinamento in relazione al ruolo.

Pertanto il costo totale a carico del progetto 04CONS.INTERMATHS è pari ad euro 90.000,00.

Titolo del Progetto: *Modelli matematici in sismologia e simulazione numerica in strutture di calcolo parallelo*

SSD: MAT/05 – Analisi matematica

Altri SSD interessati: MAT/08, MAT/07, GEO/10

Responsabili del Progetto: prof. Bruno Rubino

Requisiti: Dottorato di ricerca in Matematica o Fisica o Ingegneria corredato da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca.

Durata: un anno (rinnovabile previa verifica della disponibilità finanziaria)

Finanziamento: euro 30.000,00 – Progetto 04CONS.INTERMATHS

Breve descrizione della ricerca: La ricerca verterà sull'uso di rigorosi strumenti matematici per la modellizzazione di fenomeni di fondamentale importanza nella sismologia. In particolare, lo scopo della ricerca è di costruire e testare modelli matematici connessi alle equazioni dell'elastodinamica. La loro simulazione numerica avverrà in strutture di calcolo parallelo.

La discretizzazione delle equazioni dell'elastodinamica sarà basata su metodi spettrali agli elementi finiti e lo studio dovrà condurre alla produzione di sismogrammi artificiali in grado di definire potenziali valori di accelerazione e spostamento al suolo nell'area geografica sopra indicata.

Breve descrizione della ricerca in inglese: The research work will focus on the use of rigorous mathematical tools for the modeling of phenomena of fundamental importance in seismology. In particular, the aim of the research is to build and test mathematical models related to the equations of elastodynamics. Their numerical simulation will take place in parallel computing structures.

The spectral element methods will be used for the numerical approximations of the elastodynamics equations and the target of the numerical simulations will be the production of artificial seismograms able to define potential values for acceleration and displacement at ground level

Il Consiglio,

VISTA la Legge del 30.12.2010, n. 240

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per il conferimento di Assegni per la collaborazione ad attività di ricerca

9.16 Richiesta attivazione n. 3 Assegni di Ricerca dal titolo "*Modelli matematici in sismologia e simulazione numerica in strutture di calcolo parallelo*" – prof. Bruno Rubino

VISTO la richiesta di attivazione di n. 3 assegni di ricerca da titolo "*Modelli matematici in sismologia e simulazione numerica in strutture di calcolo parallelo*" presentata dal prof. Bruno Rubino

VISTA la Legge del 29 giugno 2022, n. 79

ACCERTATA la copertura finanziaria su risorse già stanziata e di cui è stato programmato l'impiego ai fini dell'attivazione di assegni di ricerca

all'unanimità/a maggioranza

approva la richiesta di attivazione di n. 3 assegni di ricerca annuale da titolo "*Modelli matematici in sismologia e simulazione numerica in strutture di calcolo parallelo*" presentata dal prof. Bruno Rubino, per un costo per assegno di euro 30.000,00 ed un totale di euro 90.000,00 a valere sul Progetto 04CONS.INTERMATHS.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

- 9.17 Approvazione esecuzione Progetto SoBigData.it: Strengthening the Italian RI for Social Mining and Big Data Analytics (Avviso pubblico n. 3264 del 18/12/2021 per la presentazione di proposte progettuali per "Rafforzamento e creazione di Infrastrutture di Ricerca" da finanziare nell'ambito del PNRR) – prof.ssa Antinisca Di Marco

Il Presidente illustra il progetto come da presentazione della prof.ssa Antinisca Di Marco.

Il progetto SoBigData.it "Strengthening the Italian RI for Social Mining and Big Data Analytics", è stato approvato all'interno dell'Avviso pubblico n. 3264 del 18.12.2021 per la presentazione di proposte progettuali per "Rafforzamento e creazione di Infrastrutture di Ricerca" da finanziare nell'ambito del PNRR - **Topic:** Missione 4, "Istruzione e Ricerca" - Componente 2, "Dalla ricerca all'impresa" - **Linea di investimento 3.1**, "Fondo per la realizzazione di un sistema integrato di infrastrutture di ricerca e innovazione", finanziato dall'Unione europea - NextGenerationEU.

Il progetto ha l'obiettivo di rafforzare l'hub italiano della infrastruttura di ricerca europea SoBigData, coordinata dal CNR-ISTI e avente come obiettivo di sostenere la ricerca innovativa e interdisciplinare dei molteplici e complessi aspetti della società. SoBigData enfatizza il concetto di data science responsabile, considerando i valori etici come uno dei pilastri dell'uso affidabile delle analisi dei big data e delle tecnologie di intelligenza artificiale. A tale scopo, combina dati e approcci basati su modelli e sviluppa metodologie e approcci per mettere in pratica i principi FAIR (Findable, Accessible, Interoperable, and Reusable) e i principi FACT (Fair, Accurate, Confidential, and Transparent) propri della open data science. SoBigData è il risultato di due grant H2020 (grant n.654024 and 871042) ed è parte della Roadmap ESFRI 2021. SoBigData.it si focalizza su 4 obiettivi: 1) rafforzare e creare nuovi nodi computazionali della rete italiana; 2) rafforzare e creare nuovi lavoratori virtuali per esplorare aspetti specifici della società attraverso la scienza dei dati; 3) promuovere la formazione di data scientists responsabili; 4) creare servizi digitali per le comunità multidisciplinari sfruttando la ricerca dei lavoratori virtuali e le nuove risorse computazionali e tecnologiche.

Il progetto coinvolge 11 partners ed ha ottenuto un finanziamento complessivo di quasi 20 milioni di euro mentre il Budget assegnato all'unità di ricerca dell'Università dell'Aquila ammonta ad euro 3.510.000,00; la responsabilità scientifica della unità operativa è affidata alla prof.ssa Antinisca Di Marco, che ha dettagliato le previsioni di spesa sul portale <https://finanziamenti.univaq.it> come da disposizioni dell'Ateneo.

Il progetto ha avuto inizio in data 01.11.2022 ed ha una durata prevista di 30 mesi, con una eventuale proroga di 6 mesi.

Il Consiglio,

- VISTO** il vigente Statuto di Ateneo
- VISTO** il Regolamento Generale del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica adottato con D.R. n. 1923/2012
- VISTO** l'ammissione a finanziamento del progetto SoBigData.it "Strengthening the Italian RI for Social Mining and Big Data Analytics" nell'ambito del PNRR - **Topic:** Missione 4, "Istruzione e Ricerca" - Componente 2, "Dalla ricerca all'impresa" - **Linea di investimento 3.1**, "Fondo per la realizzazione di un sistema integrato di infrastrutture di ricerca e innovazione", finanziato dall'Unione europea - NextGenerationEU
- VISTA** la scheda del Piano economico-finanziario di previsione caricata sul Portale finanziamenti dalla prof.ssa Antinisca Di Marco

- 9.17 Approvazione esecuzione Progetto SoBigData.it: Strengthening the Italian RI for Social Mining and Big Data Analytics (Avviso pubblico n. 3264 del 18/12/2021 per la presentazione di proposte progettuali per “Rafforzamento e creazione di Infrastrutture di Ricerca” da finanziare nell’ambito del PNRR) – prof.ssa Antinisca Di Marco

all’unanimità/a maggioranza

approva l’esecuzione del progetto di ricerca SoBigData.it “Strengthening the Italian RI for Social Mining and Big Data Analytics”, finanziato nell’ambito del PNRR - **Topic:** Missione 4, “Istruzione e Ricerca” - Componente 2, “Dalla ricerca all’impresa” - **Linea di investimento 3.1**, “Fondo per la realizzazione di un sistema integrato di infrastrutture di ricerca e innovazione”, finanziato dall’Unione europea – NextGenerationEU e la cui responsabilità scientifica sarà affidata alla prof.ssa Antinisca Di Marco.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

11.1 Erasmus Mundus Joint Master Degree Programme “SE4GreenDeal”: modifica allegato Consortium Agreement – Prof. Henry Muccini

Il Presidente informa che la Lappeenranta-Lahti University of Technology (LUT University), sede coordinatrice del programma Erasmus Mundus denominato “SE4GreenDeal” (Educating software engineers with a sustainability mindset to improve the well-being of people through software solutions) ha richiesto una variazione all’Addendum del Consortium Agreement del progetto stesso.

Tale variazione ha riguardato gli articoli 4b, 5, e 7, e più precisamente:

- L’art. 4b, che definisce il profilo degli studenti selezionabili, definisce ora in modo più sistematico gli aventi diritto alla selezione. Inoltre, si riporta esplicitamente che anche studenti all’ultimo anno di Bachelor possono rispondere (sotto alcune condizioni) al bando. I punti assegnati all’intervista passano inoltre da 20 a 40.
- L’art 5 dispensa il Coordinatore dalla gestione dei trasporti nella mobilità tra le varie sedi.
- L’art. 7 prevede che UnivAQ riceverà i costi di iscrizione degli studenti self-funding.

Dopo ampia discussione

Il Consiglio

VISTO l’Addendum al Consortium agreement and financial framework dell’Erasmus Mundus Joint Master Degree Programme “SE4GreenDeal” (Educating software engineers with a sustainability mindset to improve the well-being of people through software solutions)

VISTA la nota del prof. Muccini, Presidente del CAD di Informatica del 4 novembre 2022

VISTA la modifica all’Addendum degli articoli 4b, 5 e 7 come sopra esposti

all’unanimità/ a maggioranza

approva la variazione all’addendum del Consortium Agreement dell’Erasmus Mundus Joint Master Degree Programme “SE4GreenDeal” agli articoli 4b, 5 e 7 come sopra esposti.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva

**ADDENDUM to CONSORTIUM AGREEMENT and FINANCIAL FRAMEWORK
ERASMUS MUNDUS MASTERS COURSE**

SE4GD: « Educating software engineers with a sustainability mindset to improve the well-being of people through software solutions»

Lappeenranta-Lahti University of Technology LUT (LUT University), established in Lappeenranta, Finland, represented by Janne Hokkanen, Strategy Director, **Coordinating Institution** of the Consortium, of the **one part**,
and

the **Vrije Universiteit Amsterdam (VUA)**, established in Amsterdam, the Netherlands, represented by its Rector, Prof. Vinod Subramaniam,
and

the **University L'Aquila (UnivAQ)** established in L'Aquila, Italy, represented by its Rector, Prof. Edoardo Alesse,
recognized **partner** institutions of the consortium (the "**Partners**") of the **other part**

HAVE AGREED in March 2021 to the following terms and conditions, including those in the annexes, which form an integral part of the Consortium Agreement.

We have agreed the following changes and modifications in Consortium meeting (Steering Board), 28 June 2022, Barcelona, Spain:

Article 3

§3. Activities described in Annex 2 should be updated as agreed; (removal of ITMO, update course names)

§4. Amendment to Grant Agreement Annex 1, (removal of ITMO, updates for the budgets, the first summer school not at AAU but laSalle)

Article 4b)

§7. Student background: The Masters Course is open to European and non-European excellent students having acquired a BSc in Computer Science, Information Technology, Information Engineering, Information Sciences, Software Engineering, **Business Informatics or Business Information technology** ~~closely related fields providing sufficient skills and competencies in software engineering.~~

§8. Eligibility requirements: To be considered eligible for SE4GD, the applicant needs to fulfill the following general eligibility requirements:

- The higher education institution that has provided the BSc needs to be officially recognized
- The BSc degree needs to fulfill the specific competence requirements of the programme (in relation to §7).

Addition:

- **Students in their final year of Bachelor education may also apply and if qualified, receive a conditional offer. If the applicant has not completed his/her studies, he/she should include a written statement from the degree administration office (or equivalent department), confirming that he/she is enrolled on the final year of her education and stating the expected completion date. However, the degree certificates need to be provided to LUT admission services by latest 31.8. Conditionally accepted students**

need to provide the official, possibly legalized (and if needed translated) degree certificate by the deadline 6.9., or she/he will lose the study place.

(...)

The accepted language tests and their minimum score requirements are listed below.

- IELTS (Academic)*: 6.5 overall
- TOEFL internet-based test*: 93 overall
- Cambridge Certificate in Advanced English (CAE): A,B,C
- Cambridge Certificate in Proficiency in English (CPE): A,B,C

Exceptions are made for students who have completed a degree of higher education in English in Australia, Ireland, Canada, New Zealand, United Kingdom or the U.S.A.

§9. Evaluation and selection of the students

Evaluation and selection of the students: The students are selected in accordance with the election principles agreed jointly by the parties of this agreement.

Students are selected by the Admission board as described in project proposal (Annex 2). The Admission board will produce a main selection list and reserve list based on the points from the following criteria:

- Application points (max 100 points)
- Interview points (max-20 40 points)

Application points consider Academic record (Degree contents and GPA, max. 60 points), Track record (awards, scholarships, research publications, work experience, references, etc., max 20 points) and Motivation letter (max 20 points).

Students will be chosen from the selection groups according to the quota remaining, to deliver the scholarships first and then have the rest of the students in the second queue if places are available (as there are only max 3 for the same nationality).

To be selected the student has to participate in the interview and receive min 50% of the total points.

Article 5

§4. The Coordinating Institution shall manage in particular the following activities:

- a) General coordination and initiation of SE4GD programme activities in collaboration with the Partners.
- b) Coordination of the decision taking procedure.
- c) Creation of tools shared between the Partners (website, forms, guidelines ...).
- d) Payment of European grants to students and scholars involved in the SE4GD programme.
- e) Perception of tuition fees and distribution to Partner institutions.
- f) Partners' information regarding the number of students continuing their studies in each institution, and the academic data necessary for their registration at each Partner: Yearly, until December the 1st.
- g) Payments of invoices resulting from SE4GD programme general activities (except for Partners' participation, Article 7 §4), even if occurring at a Partner institution, when the Consortium has agreed on the expenses, when the costs are eligible under the Coordinating Institution criteria, reasonable, and fitting with the current budgeting of the Consortium allocation.
- h) Banking facilities for enrolled students and scholars.

- i) ~~Students transportation (organization and payment) from country to country for compulsory mobilities (between each semester)~~
- i) j) Elaboration of reports (administrative and financial) to the Consortium for each session of the SE4GD course.

Article 7

§2 The students involved in the SE4GD programme pay tuition fees. The annual rate of the latter is determined for the duration of the Consortium Agreement, i.e. 9000 € for ~~both non-EU students~~ and 4500 EU-students. ~~As Finnish legislation does not allow charging tuition fees from the self-funding EU-students, their fees are paid to UnivAq.~~

Article 11 - Annexes

The following annexes are part of the present Agreement:

Annex 1. Grant Agreement number 619839: contract between the EACEA and the Coordinator of the SE4GD Consortium (~~Amendment enclosed~~)

Annex 2. SE4GD Award criteria and partners (~~updated~~)

Annex 5. Student agreement (~~updated~~)

For the Partner universities (each signature on own page)

Date and Signature of legal representative:

Lappeenranta-Lahti University of Technology LUT

Janne Hokkanen
Strategy director

Date and Signature of legal representative:

Vrije Universiteit Amsterdam

Prof. Jeroen Geurts
Rector

Date and Signature of legal representative:

University L'Aquila

Prof. Edoardo Alesse
Rector

11.2 Accordo di cooperazione tra l'Università degli Studi dell'Aquila e Kharkiv National University of Radio Electronics (NURE), Ucraina – prof. Bruno Rubino – ratifica

Il Presidente ricorda che nella scorsa seduta fu approvato l'accordo di cooperazione con la Kharkiv National University of Radio Electronics (NURE) – Ucraina. Il testo è stato sostanzialmente revisionato rispetto a quanto approvato nell'ultima seduta del Consiglio, pertanto è necessaria una nuova approvazione, sebbene a ratifica poiché l'accordo è stato già sottoscritto.

Il testo dell'accordo viene allegato alla presente delibera.

Il Consiglio

VISTA la richiesta del Prorettore delegato per gli affari internazionali;

APPURATO che il testo dell'Accordo è in linea con quello in uso in Ateneo;

VISTO che il responsabile dell'accordo sarà il prof. Bruno Rubino

all'unanimità/ a maggioranza

esprime a ratifica il proprio parere favorevole alla sottoscrizione dell'accordo di cooperazione accademica tra l'Università degli Studi dell'Aquila e la Kharkiv National University of Radio Electronics (NURE) – Ucraina il cui testo viene allegato al presente verbale per formarne parte integrante.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

**COOPERATION № 02/3-14/022
AGREEMENT**

**between
University of L'Aquila,
ITALY
and**

**Kharkiv National University of Radio
Electronics,
UKRAINE**

To further the development of the cooperation in accordance with a mutual interest in an exchange academic program, and for the purpose of establishing a long-term mutually beneficial association, **Kharkiv National University of Radio Electronics** represented by the Acting rector Professor Igor Ruban (hereinafter referred to as NURE) on the one hand, and **University of L'Aquila** (hereinafter referred to as UAQ) represented by the Rector Professor Edoardo ALESSE on the other hand, together hereinafter referred as "the Parties", signed this Agreement (further on "Agreement") on the following:

**ДОГОВІР № 02/3-14/022 ПРО
СПІВРОБІТНИЦТВО**

**між
Університетом Л'Акваї,
ІТАЛІЯ
і
Харківським національним
університетом радіоелектроніки,
УКРАЇНА**

Для розвитку подальшого співробітництва із взаємною зацікавленістю в програмі академічного обміну та з метою встановлення довгострокової взаємовигідної асоціації, **Харківський національний університет радіоелектроніки** (далі іменованого ХНУРЕ), в особі виконуючого обов'язки ректора професора Ігоря Рубана, з одного боку, і **Університет Л'Акваї** (далі іменованого УАК) в особі ректора професора Едуардо Алессі з іншого боку, разом іменовані надалі «Сторони», підписали цю Угоду («Угода») про наступне:

ARTICLE ONE

The Parties agree to promote educational and research cooperation between the two universities on the basis of mutual respect for each other's autonomy, in conformity with the laws and regulations in force in each country and institution, and within their respective available resources.

СТАТТЯ ПЕРША

Сторони погоджуються сприяти освітньому та дослідницькому співробітництву між двома університетами на основі взаємної поваги до автономії один одного, відповідно до законів і правил, що діють у кожній країні та закладі, і в межах їхніх відповідних наявних ресурсів.

ARTICLE TWO

The Parties agree to appoint the contact persons for both Institutions:

- For UAQ: Prof. Bruno Rubino (E-mail: bruno.rubino@univaq.it).
- For NURE: Ass.Prof. Olesia Barkovska (E-mail: olesia.barkovska@nure.ua).

СТАТТЯ ДРУГА

Сторони погоджуються призначити контактних осіб для обох установ:

- Для УАК: професор Бруно Рубіно (E-mail: bruno.rubino@univaq.it).
- Для ХНУРЕ: доц. Оlesia Барковська (E-mail: olesia.barkovska@nure.ua).

ARTICLE THREE

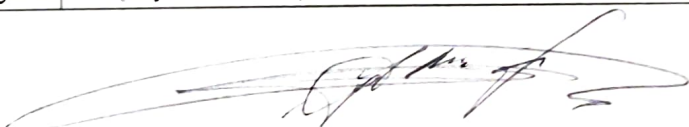
The Parties agree to exercise their best efforts to develop the following forms of cooperation:

1. Exchange of students and university staff (scientific, scientific-pedagogical, pedagogical

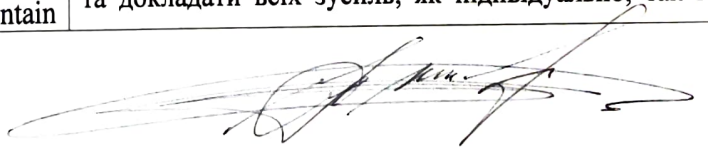
СТАТТЯ ТРЕТЯ

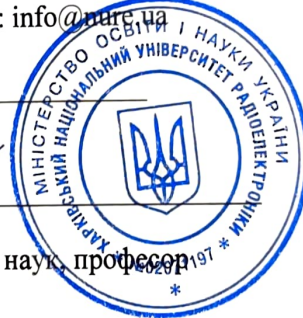
Сторони погоджуються докладати всіх зусиль для розвитку наступних форм співробітництва:

1. Обмін студентами і персоналом університету (наукові, науково-педагогічні, педагогічні



staff), as well as administrative staff (if necessary) for the purposes of teaching or research. Each exchange activity shall be approved in advance by both institutions. 2. Exchange of publications, scientific and technical, educational and educational-methodical literature, periodicals, information on the events held and exchange of educational-research materials. 3. Development and implementation of special short-term academic programs, joint degree programs, joint projects and professional development programs. 4. Publication of scientific, educational and methodological materials on the results of collaboration (joint meetings and conferences). 5. Provision of official documentation, signed by sending institution's Rector, about registered students and alumni for the purpose of: a) verifying their identity, b) verifying their qualification for admission to a degree programme or for recognition of their foreign qualification. 6. Consonant with the terms of ARTICLE ONE, access to each other's laboratories, research facilities, and libraries as may be necessary to fulfil the spirit and intent of the forgoing purposes.	працівники), а також адміністративного персоналу (при необхідності) з метою викладання та проведення спільних досліджень. Кожна діяльність з обміну повинна бути заздалегідь схвалена обома установами. 2. Обмін публікаціями, науково-технічною, навчальною та навчально-методичною літературою, періодичними виданнями, інформацією про проведені заходи та обмін навчально-дослідними матеріалами. 3. Розробка та реалізація спільних короткострокових академічних програм, спільних освітніх програм, спільних проєктів та програм професійного розвитку. 4. Публікація наукових, навчально-методичних матеріалів за результатами співпраці (спільних мітингів та конференцій). 5. Надання офіційних документів, підписаних ректором закладу, що направляє, про зареєстрованих студентів та випускників з метою: а) підтвердження їх особи, б) перевірки їхньої кваліфікації для вступу на програму отримання ступеня або для визнання їхньої іноземної кваліфікації. 6. Відповідно до умов СТАТТІ ПЕРШОЇ, доступ до лабораторій, дослідницьких установ і бібліотек один одного, якщо це може бути необхідним для досягнення вищезазначених цілей.
ARTICLE FOUR Both parties affirm their commitment to the principles of equal opportunity and non-discrimination. Participation in the exchange activities described in this Agreement, shall be based solely on the scholarly or academic level of ability and performance of the candidates.	СТАТТЯ ЧЕТВЕРТА Обидві сторони підтверджують свою відданість принципам рівних можливостей і недискримінації. Участь у заходах з обміну, описаних у цій Угоді, ґрунтуватиметься виключно на науковому або академічному рівні здібностей і результатах роботи кандидатів.
ARTICLE FIVE The Parties will facilitate the entry to, stay in, and exit from the host country for the participants in the programs within the framework of this agreement.	СТАТТЯ П'ЯТА Сторони сприятимуть в'їзду, перебуванню та виїзду з країни перебування для учасників програм у рамках цієї Угоди.
ARTICLE SIX The Parties shall collaborate in developing specific programs of cooperation under this Agreement to be embodied in and implemented. Furthermore, The Parties shall coordinate their actions and make every effort, individually and cooperatively, to pursue the financial resources necessary to maintain	СТАТТЯ ШОСТА Сторони співпрацюватимуть у розробці конкретних програм співробітництва за цією Угодою, які мають бути втілені та реалізовані. Крім того, Сторони повинні координувати свої дії та докладати всіх зусиль, як індивідуально, так і



a substantive exchange.	спільно, для отримання фінансових ресурсів, необхідних для підтримки суттєвого обміну.
ARTICLE SEVEN This agreement comes into force from the moment of its signing by the parties and is valid for 6 years with the possibility of further prolongation subject to written warning of the party 6 months before the date of expiration of the agreement.	СТАТТЯ СЬОМА Ця угода набирає чинності з моменту її підписання сторонами та діє протягом 6 років з можливістю подальшого продовження за умови письмового попередження сторони за 6 місяців до дати закінчення терміну дії угоди.
ARTICLE EIGHT LEGAL ADDRESSES and REQUISITES of the PARTIES: 1. NURE: Nauky Ave.,14, 61166, Kharkiv, Ukraine, Enterprise code: 02071197 Tel/Fax: (057) 702-16-46 web site: http://nure.ua e-mail: info@nure.ua Date: _____ Igor Ruban Doctor of technical sciences, Professor Acting rector  2. UAQ: Palazzo Camponeschi, piazza Santa Margherita 2, 67100 L'Aquila VAT number: 01021630668 Tel.: +39 333 2517899 web site: https://www.univaq.it e-mail: uri@strutture.univaq.it Date: _____ Edoardo ALESSE Professor Rector	СТАТТЯ ВОСЬМА ЮРИДИЧНІ АДРЕСИ І ЗАПИТАННЯ СТОРІН 1.ХНУРЕ: Пр. Науки, 14, 61166, Харків, Україна, Код підприємства: 02071197 Тел / Факс: (057) 702-16-46 веб-сайт: http://nure.ua електронна пошта: info@nure.ua Дата: _____ Ігор Рубан Доктор технічних наук, професор В.о. ректора  2. УАК: Палаццо Кампонескі, площа Санта-Маргерита 2, 67100, Л'Акуїла, Код підприємства: 01021630668 Тел: +39 333 2517899 веб-сайт: https://www.univaq.it електронна пошта: uri@strutture.univaq.it Дата: _____ Едоардо АЛЕССЕ Професор Ректор



COOPERATION № 213-H1022 AGREEMENT

between

University of L'Aquila,

ITALY

and

Kharkiv National University of Radio Electronics,

UKRAINE

To further the development of the cooperation in accordance with a mutual interest in an exchange academic program, and for the purpose of establishing a long-term mutually beneficial association, **Kharkiv National University of Radio Electronics** represented by the Acting rector Professor Igor Ruban (hereinafter referred to as NURE) on the one hand, and **University of L'Aquila** (hereinafter referred to as UAQ) represented by the Rector Professor Edoardo ALESSE on the other hand, together hereinafter referred as "the Parties", signed this Agreement (further on "Agreement") on the following:

ARTICLE ONE

The Parties agree to promote educational and research cooperation between the two universities on the basis of mutual respect for each other's autonomy, in conformity with the laws and regulations in force in each country and institution, and within their respective available resources.

ARTICLE TWO

The Parties agree to appoint the contact persons for both Institutions:

- For UAQ: *Prof. Bruno Rubino* (E-mail: bruno.rubino@univaq.it).
- For NURE: *Ass.Prof. Olesia Barkovska* (E-mail: olesia.barkovska@nure.ua).

ARTICLE THREE

The Parties agree to exercise their best efforts to develop the following forms of cooperation:



1. Exchange of students and university staff (scientific, scientific-pedagogical, pedagogical staff), as well as administrative staff (if necessary) for the purposes of teaching or research. Each exchange activity shall be approved in advance by both institutions.

2. Exchange of publications, scientific and technical, educational and educational-methodical literature, periodicals, information on the events held and exchange of educational-research materials.

3. Development and implementation of special short-term academic programs, joint degree programs, joint projects and professional development programs.

4. Publication of scientific, educational and methodological materials on the results of collaboration (joint meetings and conferences).

5. Provision of official documentation, signed by sending institution's Rector, about registered students and alumni for the purpose of:

a) verifying their identity,

b) verifying their qualification for admission to a degree programme or for recognition of their foreign qualification.

6. Consonant with the terms of ARTICLE ONE, access to each other's laboratories, research facilities, and libraries as may be necessary to fulfil the spirit and intent of the forgoing purposes.

ARTICLE FOUR

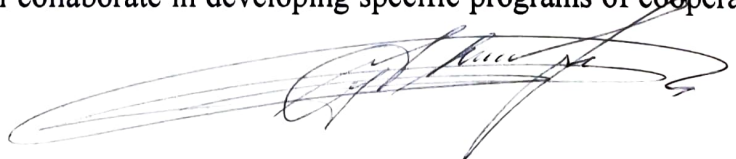
Both parties affirm their commitment to the principles of equal opportunity and non-discrimination. Participation in the exchange activities described in this Agreement, shall be based solely on the scholarly or academic level of ability and performance of the candidates.

ARTICLE FIVE

The Parties will facilitate the entry to, stay in, and exit from the host country for the participants in the programs within the framework of this agreement.

ARTICLE SIX

The Parties shall collaborate in developing specific programs of cooperation

A handwritten signature in blue ink, appearing to be a stylized name, located at the bottom right of the page.

under this Agreement to be embodied in and implemented. Furthermore, The Parties shall coordinate their actions and make every effort, individually and cooperatively, to pursue the financial resources necessary to maintain a substantive exchange.

ARTICLE SEVEN

This agreement comes into force from the moment of its signing by the parties and is valid for 6 years with the possibility of further prolongation subject to written warning of the party 6 months before the date of expiration of the agreement.

ARTICLE EIGHT

LEGAL ADDRESSES and REQUISITES of the PARTIES:

1. NURE:

Nauky Ave.,14, 61166, Kharkiv,
Ukraine,
Enterprise code: 02071197
Tel/Fax: (057) 702-16-46
web site: <http://nure.ua>
e-mail: info@nure.ua

2. UAQ:

Palazzo Camponeschi, piazza Santa
Margherita 2, 67100 L'Aquila
VAT number: 01021630668
Tel.: +39 333 2517899
web site: <https://www.univaq.it>
e-mail: uri@strutture.univaq.it

Date:

Igor Ruban
Doctor of technical sciences, Professor
Acting rector



Date:

Edoardo ALESSE
Professor
Rector

13.1 Accordo quadro ISOCLEAN S.r.l. – prof. Henry Muccini

Il Presidente lascia la parola al prof. Muccini, il quale illustra l'accordo qui proposto.

Isoclean è un'azienda operante nei settori della pulizia e sanificazione degli stabili e svolge, attraverso la partecipazione competitiva a programmi di ricerca regionali nazionali ed europei, attività di ricerca industriale e sviluppo sperimentale nelle aree tecnologiche, applicative e di processo negli ambiti sotto elencati.

Con la stipula del presente accordo si intende instaurare un rapporto di collaborazione al fine di intraprendere attività di ricerca, di didattica e di sviluppo, e di sfruttare possibili sinergie in diversi ambiti quali l'Informatica, l'Ingegneria dell'Informazione, e la Matematica intesi nel senso più generico ed esteso. Si intende promuovere, sviluppare e consolidare opportunità ed iniziative di collaborazione in particolare, nei seguenti ambiti:

- Progettazione di Sistemi Software;
- Algoritmi;
- Analisi dei dati;
- Sviluppo di Sistemi Software;
- Ottimizzazione performance software preesistente;
- Implementazione sicurezza dei sistemi.

Per l'attuazione e la gestione delle attività, sono stati individuati i seguenti referenti con il compito di definire le linee di azione comuni:

- per UNIVAQ, il prof. Henry Muccini
- per Isoclean, il dott. Roberto Di Pietro

L'accordo ha una durata di 3 anni dalla data della stipula, eventualmente rinnovabile per ulteriori 3 anni.

La collaborazione tra Univaq e la società Isoclean sarà attuata tramite stipula di appositi accordi esecutivi nel rispetto delle finalità istituzionali delle parti e della normativa vigente, che ne determineranno gli eventuali oneri.

Per la stipula del presente Accordo non sono previsti oneri a carico delle parti.

Il Presidente ringrazia il prof. Muccini ed informa che il testo dell'accordo è stato preventivamente visionato sia dall'Ufficio trasferimento tecnologico che dall'Ufficio Contratti e Gare e procede alla lettura dello stesso.

Il Consiglio

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila,

VISTO il vigente Regolamento Generale di Ateneo dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento Generale del DISIM

SENTITO il testo dell'Accordo quadro con la società Isoclean Srl

CONSIDERATO che i Responsabili Scientifici dell'Accordo sono:

- Per l'Università, il prof. Henry Muccini
- Per Isoclean, il dott. Roberto Di Pietro

TENUTO CONTO che l'accordo con la società Isoclean Srl non comporta spese

13.1 Accordo quadro ISOCLEAN S.r.l. – prof. Henry Muccini

all'unanimità/a maggioranza

approva la proposta di sottoscrizione dell'Accordo quadro con la società Isoclean Srl presentata dal prof. Henry Muccini che viene allegato al presente verbale per formarne parte integrante.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

ACCORDO QUADRO

tra

L'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA, codice fiscale e partita IVA 01021630668, con sede legale a L'Aquila, Palazzo Camponeschi, piazza Santa Margherita 2 rappresentata dal Rettore Prof. Edoardo Alesse, nato a Leonessa (RI) il 17/02/1958, per la carica ed agli affetti del presente atto domiciliato presso la sede dell'Università

e

l'azienda ISOCLEAN s.r.l., con sede legale in Strada Colle di Mezzo, 21 - Pescara (PE) – 65125, CF 02153060682 rappresentata da Roberto Di Pietro in qualità di Amministratore Unico nato a Pescara il 20/12/1974;

Considerato che

- Isoclean è un'azienda operante nei settori della pulizia e sanificazione degli stabili e svolge, attraverso la partecipazione competitiva a programmi di ricerca regionali nazionali e europei, attività di ricerca industriale e sviluppo sperimentale nelle aree tecnologiche, applicative e di processo negli ambiti più avanti elencati all'Art. 2;
- L'Università degli Studi dell'Aquila ha competenze anche nel campo dell'informatica;
- Le parti intendono collaborare e svolgere attività di interesse comune;

Premesso che

- a) L'Università, all'art. 2 del proprio Statuto, favorisce i rapporti con le istituzioni pubbliche e private, con le imprese, le forze produttive e sociali, allo scopo di diffondere, valorizzare e promuovere i risultati della ricerca scientifica e dell'alta formazione;
- b) l'Università intende generare e supportare i processi di sviluppo tecnologico fondati sulla condivisione di conoscenze, attraverso l'interazione con attori pubblici e privati, al fine di contribuire alla creazione e distribuzione di conoscenza su cui basare i processi di innovazione tecnologica, organizzativa e gestionale;
- c) l'Università e l'Azienda intendono instaurare un rapporto stabile e continuativo di collaborazione, nel quale le attività di studio e ricerca e trasferimento tecnologico condotte dall'Università possano integrare, con l'utilizzo di risorse qualificate e strumenti adeguati, le corrispondenti attività sviluppate dall'Azienda;

SI STIPULA E CONVIENE QUANTO APPRESSO

Articolo 1 – Ambito di collaborazione

1. I contraenti, nell'ambito delle proprie attività di ricerca e sviluppo e di formazione, si impegnano a fornire l'uno all'altro, per tutta la durata del presente accordo quadro, collaborazione al fine di intraprendere attività di ricerca, di didattica e di sviluppo, e di sfruttare possibili sinergie in diversi ambiti quali l'Informatica, l'Ingegneria dell'Informazione, e la Matematica intesi nel senso più generico ed esteso.
2. Le Parti si impegnano a favorire lo sviluppo delle conoscenze per lo svolgimento di programmi di interesse comune.
3. Ciascuna delle Parti assicura all'altra, nell'ambito dei programmi concordati e secondo le modalità di cui al successivo art. 7, l'uso dei propri impianti ed attrezzature e la collaborazione del proprio personale e delle risorse finanziarie specificamente destinate
4. Le Parti si impegnano a promuovere, sviluppare e consolidare opportunità ed iniziative di collaborazione in particolare, nei seguenti ambiti dell'Informatica:
 - a. Progettazione di Sistemi Software;
 - b. Algoritmi;
 - c. Analisi dei Dati;
 - d. Sviluppo di Sistemi Software;
 - e. Ottimizzazione performance software preesistente;
 - f. Implementazione sicurezza dei sistemi.

Articolo 2 - Responsabili dell'Accordo e referenti

1. Per l'attuazione e la gestione delle attività, le Parti designano ciascuna un responsabile ed un referente con il compito di definire le linee di azione comuni
- Responsabili dell'Accordo:
Per UnivAQ, il Direttore del Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica (DISIM),

Prof. Guido Proietti - PEC: disim@pec.univaq.it;
• Per ISOCLEAN s.r.l. l'Amministratore Unico ROBERTO DI PIETRO - PEC: isoclean@legalmail.it

Referenti per l'Accordo:
Per UNIVAQ Prof. H. MUCCINI
Per "ditta" Dott. R. DI PIETRO

Articolo 3 - Pubblicazione e Proprietà dei risultati

3.1 Brevetti e Know-how preesistente

- Ciascuna Parte del presente accordo è proprietario dei diritti afferenti i risultati conseguiti nell'ambito del Progetto stesso, in ragione dell'apporto fornito da ciascuno. Ai fini delle migliori attività di eventuale utilizzo e sfruttamento, le Parti potranno concordare, nel rispetto degli apporti di ciascuno, l'attribuzione e l'esercizio dei diritti di proprietà sui predetti risultati (cd. Foreground);
- La proprietà delle conoscenze tecniche e le procedure, brevettate e non, sviluppate antecedentemente all'avvio delle attività di cui al presente Accordo sono e rimangono di proprietà della Parte che le ha generate. (cd. Background);
- La proprietà delle conoscenze, informazioni nonché ogni bene immateriale protetto ai sensi della normativa nazionale, comunitaria e internazionale in materia di proprietà intellettuale e industriale realizzati o comunque conseguiti da una Parte durante il periodo di efficacia del presente contratto ma non in esecuzione dello stesso (cd. Sideground) spetta alla parte che le ha generate.

3.2 Risultati delle attività collaborative

Le Parti concordano che:

- qualora le attività svolte in maniera congiunta conducano a risultati suscettibili di tutela attraverso diritti di proprietà industriale, questi saranno regolati dalla normativa di riferimento (D.Lgs 30/2005) e dai Regolamenti in materia adottati dalle Parti; nel contesto di ricerca collaborativa, pertanto, la titolarità apparterrà congiuntamente alle Parti dell'accordo in relazione al contributo – dimostrato o comunque dimostrabile - apportato da ciascuno, sia esso inventivo, che materiale e finanziario, ingegneristico e progettuale, e fermo restando il diritto morale di essere riconosciuto come inventore di chiunque abbia partecipato con attività inventiva all'ottenimento del risultato protetto.
- Rispetto a tali nuovi diritti di proprietà industriale, nell'interesse specifico delle Parti e ai fini di attivare ogni utile iniziativa diretta all'utilizzazione economica degli stessi, le Parti potranno concordare in dettagliati e successivi accordi lo sfruttamento di tali diritti, concedendo in ogni caso il diritto di utilizzazione a titolo gratuito per pubblicazioni a carattere scientifico e per la prosecuzione delle attività istituzionali di ricerca.
- Qualora invece le attività svolte in maniera congiunta non fossero ritenute tutelabili attraverso un diritto di proprietà industriale ivi compresi i segreti industriale e commerciali, tali risultati potranno essere utilizzati e divulgati da ciascuna Parte solo previa autorizzazione scritta dell'altra Parte, da ottenersi attraverso richiesta con obbligo di risposta nel termine di 30gg. Trascorso tale termine l'autorizzazione verrà considerata concessa.

3.3. Utilizzazione e diffusione dei risultati

Successivamente alla conclusione delle specifiche attività oggetto del presente Accordo, i risultati parziali e finali potranno essere utilizzati dalle Parti per eventuali pubblicazioni a nome congiunto, previo consenso delle altre Parti, fatto salvo il rispetto dei requisiti per la brevettazione.

Articolo 4 - Durata

Il presente accordo avrà durata 3 anni (tre anni) a decorrere dalla data di sottoscrizione e potrà essere rinnovato per ulteriori 3 anni (tre anni) in seguito ad accordo scritto tra le Parti.

Articolo 5 - Recesso o scioglimento

1. Le parti hanno facoltà di recedere unilateralmente dal presente accordo per giustificato motivo ovvero di scioglierlo consensualmente; il recesso deve essere esercitato mediante comunicazione scritta da notificare con raccomandata A.R. oppure a mezzo PEC.
2. Il recesso ha effetto decorsi tre mesi dalla data di notifica dello stesso.
3. In caso di recesso unilaterale o di scioglimento le parti concordano fin d'ora, comunque, di portare a conclusione le attività in corso e i singoli contratti e accordi operativi già stipulati alla data di estinzione dell'accordo, salvo quanto eventualmente diversamente disposto negli stessi.
4. Il recesso unilaterale o lo scioglimento hanno effetto per l'avvenire e non incidono sulla parte di accordo

già eseguito.

Articolo 6 - Modalità di attuazione

1. La collaborazione tra UnivAQ e ISOCLEAN sarà attuata tramite stipula di appositi accordi esecutivi nel rispetto delle finalità istituzionali delle parti, del presente Accordo e della normativa vigente.
2. Detti accordi esecutivi disciplineranno le modalità secondo cui si attuerà la collaborazione fra le parti, specificando, in particolare, i referenti ed i responsabili delle attività, gli aspetti relativi alla proprietà dei risultati della collaborazione stessa, nonché specifici aspetti relativi alla sicurezza.

Articolo 7 – Accesso alle strutture ed utilizzo di attrezzature

1. Qualora sia necessario, l'Azienda consente al personale dell'Università incaricato dello svolgimento della ricerca l'accesso alle proprie strutture individuate di volta in volta, nonché l'utilizzo eventuale di proprie attrezzature, nel rispetto delle disposizioni di legge e dei regolamenti vigenti nelle stesse, in conformità e osservanza delle norme di protezione, di sicurezza e sanitarie ivi applicate.
2. Allo stesso modo, qualora si rendesse necessario, l'Università può consentire al personale dell'Azienda l'accesso alle proprie strutture nonché l'uso delle proprie attrezzature di laboratorio, individuate di volta in volta, nel rispetto delle disposizioni di legge e dei regolamenti vigenti nell'ateneo ed in conformità ed osservanza delle norme di protezione, di sicurezza e sanitarie ivi applicate.
3. Il personale di ciascuna delle Parti contraenti che, in virtù del presente Accordo, ha accesso alle strutture e alle apparecchiature della controparte, è responsabile dei danni causati alle apparecchiature stesse e a terzi.
4. Le Parti garantiscono copertura assicurativa al proprio personale relativamente agli infortuni e per i danni ad essi imputati secondo le regole di responsabilità civile.
5. L'utilizzo delle attrezzature di controparte è sempre subordinato alla preventiva autorizzazione dei soggetti responsabili.

Articolo 8 - Oneri

Il presente Accordo non comporta oneri a carico delle parti. Gli eventuali oneri saranno determinati nei singoli accordi esecutivi di cui al precedente articolo e secondo le previsioni normative vigenti.

Articolo 9 - Riservatezza

Le parti si impegnano, a non divulgare all'esterno dati, notizie, informazioni di carattere riservato eventualmente acquisite a seguito e in relazione alle attività oggetto del presente Accordo.

Articolo 10 - Sicurezza

1. Allo scopo di dare attuazione a quanto previsto dal Testo Unico sulla sicurezza sul lavoro, di cui al D.lgs. 9.4.2008, n. 81 integrato con il D.lgs. 3.8.2009, n. 106, si stabilisce che le parti si assumono tutti gli oneri relativi all'applicazione delle norme in materia di salute e sicurezza sui luoghi di lavoro nei confronti dei soggetti ospitati nelle strutture presso cui si svolgeranno le attività oggetto del presente accordo.
2. Si demanda a accordi operativi la definizione dei soggetti ai quali attribuire Le posizioni di garanzia di cui all'articolo 2, comma 1, lettere b), d) ed e) del D.lgs. 9.4.2008, n. 81 e ss.mm.ii.

Articolo 11 - Dati personali

1. L'Università provvede al trattamento, alla diffusione ed alla comunicazione dei dati personali relativi alla presente Convenzione nell'ambito del perseguimento dei propri fini istituzionali e di quanto previsto dal proprio regolamento in attuazione del decreto legislativo del 30 giugno 2003, n. 196, sul trattamento dei dati personali e si impegna a non farne alcun altro uso.
2. Il Titolare del trattamento dei dati personali per l'Università è il Rettore, ovvero il soggetto nominato in qualità di responsabile per il trattamento degli stessi.
3. L'Azienda si impegna al trattamento, alla diffusione ed alla comunicazione dei dati dell'Università unicamente per le finalità connesse all'esecuzione della presente convenzione. Il Titolare del trattamento dei dati personali per L'Azienda è il legale rappresentante pro tempore.

Articolo 12 - Registrazione e spese

Il presente Accordo è soggetto a registrazione solo in caso d'uso ai sensi dell'art. 5, primo comma D.P.R. 131 del 26/4/1986 ed art. 4, Tariffa Parte Seconda allegata al medesimo decreto, su richiesta e con oneri a carico della Parte richiedente.

Le spese per il bollo sono a carico della ISOCLEAN s.r.l.

Letto, confermato e sottoscritto in duplice copia

L'Aquila, 08/11/2022

Per l'Università degli Studi dell'Aquila
Il Rettore
Prof. Edoardo Alesse

Isoclean S.r.l.
Strada Colle di Mezzo,
65125 Pescara
tel 085.4308507 | fax 085.43
P.Iva e C.F. 0215306065

Per Isoclean S.r.l.
Amministratore unico
Roberto Di Pietro



13.2 Ripartizione conto terzi LFoundry Srl nuovo regolamento – prof. Claudio Arbib

Il Presidente ricorda che lo scorso consiglio è stata approvata la ripartizione del contratto concluso con la società LFoundry Srl redatto secondo le norme del Regolamento D.R. n. 719-2014 del 1.8.2014 in quanto il contratto era stato stipulato nell'anno 2016.

Il Settore Contabilità del Personale ha comunicato che lo schema di ripartizione da utilizzare deve essere quello redatto secondo le norme del Regolamento D.R. 159-2017 del 31.03.2017, in quanto la fatturazione è stata contabilizzata solamente nell'anno 2022.

Le tabelle qui presentare sono pertanto state aggiornate secondo le nuove disposizioni.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTA l'art. 66 del D.P.R. 382/80

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per l'Amministrazione, la Finanza e la Contabilità

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo relativo ai contratti e convenzioni per attività conto terzi, emanato con D.R. 376 del 30.01.2007 e successive modificazioni

PRESO ATTO della Relazione presentata sulle attività svolte

VISTO il nuovo prospetto di ripartizione presentato dal prof. Claudio Arbib, redatto ai sensi del Regolamento D.R. 159-2017 del 31.03.2017

all'unanimità/a maggioranza

approva la proposta di ripartizione dell'utile relativa al contratto in conto terzi stipulato con la Società LFoundry Srl, sul Progetto 04CT.LFOUNDRY-2016 secondo il prospetto presentato dal prof. Claudio Arbib redatto ai sensi del Regolamento D.R. 159-2017 del 31.03.2017.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.

Prestazione: Contratto di Ricerca/Consulenza/Didattica/Tariffario
 Cliente: LFOUNDRY SRL
 Proposta del: 07/11/2022

DETERMINAZIONE DEL CORRISPETTIVO DELLE PRESTAZIONI

	%	PREVENTIVO	Vincoli	%	CONSUNTIVO	Vincoli
ENTRATE						
Importo della prestazione	100,00	6.500,00		100,00	6.500,00	
SPESE (art. 7 reg. c/t)						
a) fondo comune Ateneo quota fissa 10%	10,00	650,00		10,00	650,00	
b) acquisto apparecchiature/ammortamento		-				
c) costo personale dipendente						
d) viaggi e missioni personale coinvolto		-				
e) collaborazioni esterne (max 50% del costo del personale - rigo 13)	50,00	-	2.047,50	50,00	-	-
f) borse dottorato, postdottorato, assegni di ricerca, contratti ricercatori T.D.					-	-
g) altri costi						
h) utile (minimo 20% max 90% rigo 9)	90,00	5.850,00	1.300,00	90,00	5.850,00	1.300,00
i) investimenti sul capitale umano e attrezzature di interesse generale scientifico e didattico		-	CONTROLLO RIPARTIZIONE UTILE			CONTROLLO RIPARTIZIONE UTILE
l) oneri fortettari Ateneo 10% - al netto delle spese di investimento rigo 19	10,00	585,00		10,00	585,00	
m) oneri fortettari Dipartimento - 20 % degli utili - rigo 18	20,00	1.170,00		20,00	1.170,00	
n) fino a 70% personale coinvolto direttamente	70,00	4.095,00	-	70,00	4.095,00	-
Totali		6.500,00			6.500,00	
Riscontro totale Entrate e Spese		-			-	

PROFILI PROFESSIONALE DEL PERSONALE DIPENDENTE

	%	PREVENTIVO	CONSUNTIVO	CONTROLLO CONSUNTIVO
Professori Ordinari e Associati	85,00	3.480,75	3.480,75	
Ricercatori		-	-	
Personale tecnico	-	-	-	
Personale amministrativo	15,00	614,25	614,25	
Totali	100,00	4.095,00	4.095,00	-

CONSUNTIVO

DETERMINAZIONE DELL'UTILE	5.850,00	
Di cui da destinarsi alla remunerazione del personale	4.095,00	-

RIPARTIZIONE DELL'UTILE

Dipendente	%	CONSUNTIVO	Quota da destinare al fondo comune 5% PERDOC	Netto a distribuire
Professori Ordinari ed Associati				
CLAUDIO ARBIB	56,67	2.320,64	116,03	2.204,60
Professori Ordinari ed Associati				
STEFANO SMRIGLIO	28,33	1.160,11	58,01	1.102,11
Ricercatori	0,00	-	-	-
Personale Amministrativo - extra orario - ex art. 2 c. 3 del DR n. 26/2013 del 08/01/2013 mod. DR n. 158/2017 del 31/03/2017	0,00	-	-	-
Personale Amministrativo - in orario - ex art. 11 c. 1 del D.R. n. 159/2017 del 31/03/2017	15,00	614,25	-	614,25
...		0,00		
...		0,00		
...		0,00		
Totale	100,00	4.095,00	174,04	3.920,96

controllo

Il Responsabile amm.vo contabile
 Sig.ra Mara Grisenti

Il Responsabile
 Prof. Claudio Arbib

CLB

13.3 Ripartizione conto terzi Armundia Group (DLT) – dott. Giovanni De Gasperis

Il Presidente comunica che il dott. Giovanni De Gasperis, responsabile dell'attività di ricerca commissionata dalla Armundia Group Srl relativa al contratto Repertorio 84/2020, avendo terminato le attività e considerato che la società ha regolarmente saldato le fatture emesse, hanno presentato la scheda di ripartizione del contratto, redatto secondo le norme del Regolamento D.R. 159-2017 del 31.03.2017.

La relazione sulle attività svolte relative alla commessa viene allegata al presente verbale.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTA l'art. 66 del D.P.R. 382/80

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo per l'Amministrazione, la Finanza e la Contabilità

VISTO il vigente Regolamento di Ateneo relativo ai contratti e convenzioni per attività conto terzi, emanato con D.R. 376 del 30.01.2007 e successive modificazioni

PRESO ATTO della Relazione presentata sulle attività svolte

VISTO il prospetto di ripartizione presentato dal dott. Giovanni De Gasperis

all'unanimità/a maggioranza

1. **approva** la relazione presentata dal dott. Giovanni De Gasperis in merito alle attività svolte relative al contratto stipulato con la Armundia Group Srl;
2. **approva** la proposta di ripartizione dell'utile relativa al contratto in conto terzi stipulato con la Armundia Group Srl, sul Progetto 04CT.ARMUNDIA.DLT secondo il prospetto presentato dal dott. Giovanni De Gasperis.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELL'AQUILA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E SCIENZE
DELL'INFORMAZIONE E MATEMATICA



Oggetto: Relazione finale attività di ricerca conto terzi contratto Armundia 2020

Il progetto intitolato "Progetto di fattibilità DLT su workflow contrattuale con dimostratore" ha visto il sottoscritto impegnato nel proporre una metodologia per l'introduzione delle tecnologie di "*Distributed Ledger*", o "*Blockchain*", al committente Armundia Group Srl rispetto ad un modello contrattuale normalmente offerto ai loro clienti.

E' stato pertanto possibile emettere un bando di borsa di ricerca di 4 mesi dal titolo "Supporto alla Progettazione e Scouting di tecnologie Distributed Ledger (Blockchain) e Cloud Computing" per mezzo della quale si sono potute approfondire nel 2021 le tematiche e realizzare un dimostratore su un cluster di server virtuali di gestione della transazione basati sulla tecnologia blockchain Corda, adottata dall'ABI, Associazione Bancaria Italiana.

E' stato possibile anche capitalizzare la ricerca in collaborazione con il gruppo di ricerca e sviluppo di Armundia tramite una pubblicazione scientifica negli atti del convegno internazionale "*3rd International Congress on Blockchain and Applications Salamanca (Spain), Oct 2021*", pubblicati da Springer dal titolo "*Case Study: The Automation Of An Over The Counter Financial Derivatives Transaction Using The CORDA Blockchain*", autori Giovanni De Gasperis, Sante Dino Facchini (borsista), Michela Ciampoli e Andrei Carare (Armundia).

Sono state discusse anche diverse opportunità di deployment in cloud, privato, pubblico oppure SAS, aggiornando la soluzione alla versione di Corda R3, producendo tutta la documentazione necessaria alla produzione di una CordaApp, illustrando con diagrammi progettuali utilizzando il CordaApp Design Language (CDL), che specifica in dettaglio il modello di smart contract proposto.

L'Aquila, li 8/11/2022

Il Responsabile Scientifico
Dott. Ing. Giovanni De Gasperis

Prestazione:	Contratto di Ricerca
Cliente:	ARMUNDIA GROUP SRL
Proposta del:	09/07/2020

DETERMINAZIONE DEL CORRISPETTIVO DELLE PRESTAZIONI

	%	PREVENTIVO	Vincoli	%	CONSUNTIVO	Vincoli
ENTRATE						
Importo della prestazione	100,00	7.500,00		100,00	7.500,00	
SPESE (art. 7 reg. c/t)						
a) fondo comune Ateneo quota fissa 10%	10,00	750,00		10,00	750,00	
b) acquisto apparecchiature/ammortamento		-				
c) costo personale dipendente						
d) viaggi e missioni personale coinvolto		-				
e) collaborazioni esterne (max 50% del costo del personale - rigo 13)	50,00	1.750,00	1.750,00	50,00	1.750,00	
f) borse dottorato, postdottorato, assegni di ricerca, contratti ricercatori T.D.		-			4.013,76	-
g) altri costi						
h) utile (minimo 20% max 90% rigo 9)	66,67	5.000,00	1.500,00	36,48	2.736,24	1.500,00
i) investimenti sul capitale umano e attrezzature di interesse generale scientifico e didattico		-	CONTROLLO RIPARTIZIONE UTILE			CONTROLLO RIPARTIZIONE UTILE
l) oneri forfettari Ateneo 10% - al netto delle spese di investimento rigo 19	10,00	500,00		10,00	273,62	
m) oneri forfettari Dipartimento - 20 % degli utili - rigo 18	20,00	1.000,00		20,00	547,25	
n) fino a 70% personale coinvolto direttamente	70,00	3.500,00	-	70,00	1.915,37	-
Totali		7.500,00			7.500,00	
Riscontro totale Entrate e Spese		-			-	

cofin AR

PROFILI PROFESSIONALE DEL PERSONALE DIPENDENTE

	%	PREVENTIVO	CONSUNTIVO	CONTROLL O CONSUNTIVO
Professori Ordinari e Associati	-	-	-	
Ricercatori	85,00	2.975,00	1.628,06	
Personale tecnico	-	-	-	
Personale amministrativo	15,00	525,00	287,31	
Totali	100,00	3.500,00	1.915,37	-

CONSUNTIVO

DETERMINAZIONE DELL'UTILE	2.736,24
Di cui da destinarsi alla remunerazione del personale	1.915,37

RIPARTIZIONE DELL'UTILE

Dipendente	%	CONSUNTIVO	Quota da destinare al fondo comune 5% PERDOC	Netto a distribuire
Professori Ordinari ed Associati	0,00	-	-	-
Ricercatori	85,00	1.628,06	81,40	1.546,66
Personale Amministrativo - extra orario - ex art. 2 c. 3 del DR n. 26/2013 del 08/01/2013 mod. DR n. 158/2017 del 31/03/2017	15,00	287,31	-	287,31
Personale Amministrativo - in orario - ex art. 11 c. 1 del D.R. n. 159/2017 del 31/03/2017	0,00	-	-	-
		0,00		
		0,00		
...		0,00		
...		0,00		
...		0,00		
Totale	100,00	1.915,37	81,40	1.833,96

controllo

Il Responsabile amm.vo contabile
Sig.ra Mara Grisenti

Il Responsabile
Dott. Giovanni De Gasperis

Giovanni De Gasperis

13.4 Accordo di trasferimento dati con UKBioBank LTD – prof.ssa Antinisca Di Marco

Il Presidente cede la parola alla prof.ssa Antinisca Di Marco per l'illustrazione dell'Accordo di trasferimento dati proposto con UK BioBank, che rientra tra i protocolli d'intesa di collaborazione scientifica che non comportano oneri economici a carico dei contraenti per i quali il Presidente di dipartimento ha avuto la delega alla stipula dal CdA del 29.07.2015.

La stipula del presente accordo si è resa necessaria in quanto siamo recentemente entrati nel partenariato del progetto "The Relationship Between Normal Blood Pressure Values, Serum Uric Acid and Cardiovascular and Metabolic Phenotypes." di cui è PI il dott. Alessandro Mengozzi dell'Università di Pisa. Siccome il progetto è collegato al database Uk-Biobank (<https://www.ukbiobank.ac.uk/enable-your-research>) di proprietà di UK Biobank Limited, è stato necessario pagare una fee (una tantum) pari a GBP 1000 (pari a EUR 1.137,98), anticipata dall'unità di ricerca dell'Università di Pisa composta del dott. Mengozzi, il Prof. Masi ed il Prof. Viridis, che il DISIM ha rimborsato.

È necessario che il DISIM sottoscriva l'allegato accordo, che presenta le seguenti caratteristiche:

Si articola in:

- Termini e le Condizioni d'uso per il Collaboratore (compresi i documenti e/o i materiali in essi richiamati), il contenuto del Modulo di richiesta (ove applicabile). Si compone di 17 articoli e relativi comma che disciplinano:
 - o Articolo 1: Fornitura di materiali da parte di UK Biobank
 - o Articolo 2: Utilizzo dei materiali da parte del collaboratore
 - o Articolo 3: Generazione di dati da parte del collaboratore
 - o Articolo 4: Conferme da parte del collaboratore
 - o Articolo 5: Pubblicazione della sintesi divulgativa (lay summary), consegna e pubblicazione dei risultati
 - o Articolo 6: Spese
 - o Articolo 7: Conferma e revisione annuale
 - o Articolo 8: Riservatezza
 - o Articolo 9: Protezione dati
 - o Articolo 10: Limitazione di responsabilità
 - o Articolo 11: Termine
 - o Articolo 12: Risoluzione e conseguenze della risoluzione
 - o Articolo 13: Avvisi
 - o Articolo 14: Affiliati, cessione e subappalto
 - o Articolo 15: Forza maggiore
 - o Articolo 16: Risoluzione delle controversie
 - o Articolo 17: Termini generali
- Allegato 1: Descrizione del trattamento dei dati e addendum per il Regno Unito;
- Allegato 2: Misure di sicurezza;
- Allegato 3: Modello di modulo di conferma annuale del collaboratore;
- Allegato 4: Progetto di ricerca approvato - che riassume i materiali che saranno messi a disposizione del Collaboratore.

Si allega la traduzione in lingua italiana del documento.

13.4 Accordo di trasferimento dati con UKBioBank LTD – prof.ssa Antinisca Di Marco

Il team, modificabile, che potrà accedere ai dati è composto da:

Prof.ssa Antinisca Di Marco

Prof. Giovanni Stilo

Dott. Alessandro Giovannelli

Dottorando Andrea Bianchi

Dottorando Giordano d'Aloisio

Borsista Jessica Leone.

La durata dell'accordo è di 24 mesi.

Tutti i dati che saranno trattati nel corso della ricerca sono anonimizzati, in tal modo è garantita la conformità al GDPR. Si allega il protocollo seguito da UK BioBank per anonimizzare i dati (de-identification-protocol.pdf) e il file che descrive i campi del dataset (Dictionary_custom.xls).

Il Presidente ringrazia la prof.ssa Di Marco ed invita il Consiglio ad esprimersi in merito.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila,

VISTO il vigente Regolamento Generale di Ateneo dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento Generale del DISIM

VISTA la delega ai Direttori di Dipartimento attribuita dal CdA del 29.07.2015 alla sottoscrizione di protocolli d'intesa di collaborazione scientifica con altre università, enti pubblici o privati laddove non comportano oneri economici a carico dei contraenti

SENTITO il testo dell'Accordo di trasferimento dati con UK BioBank LTD proposto dalla prof.ssa Antinisca Di Marco

CONSIDERATO che è stata corrisposta la FEE una tantum per consentire il trasferimento dei dati necessari alla ricerca

□ **all'unanimità/a maggioranza**

1. approva l'Accordo di trasferimento dati con UK BioBank LTD proposto dalla prof.ssa Antinisca Di Marco per la raccolta dei dati anonimizzati necessari alla ricerca, allegato alla presente delibera per formarne parte integrante

2. autorizza il Presidente alla sottoscrizione.

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.



Material Transfer Agreement - Collaborator

Dear Professor Di Marco

Collaborator Institution: University of L'Aquila
Application Reference Number: 69098

UK Biobank Limited (“**UK Biobank**”) is pleased to approve your Application to use the UK Biobank resource. UK Biobank’s approval of this Application is valid for 90 days during which time the Collaborator Institution (“**Collaborator**”) must execute this Material Transfer Agreement (“**MTA**”) and the Applicant must pay the Access Charges. These are the final steps before access is granted. If these steps are not taken within 90 days, UK Biobank reserves the right to remove this approval for the Collaborator to use the UK Biobank resource.

Parties

This is an agreement between UK Biobank and the Collaborator (each a “**party**”, together the “**parties**”). The Lead Collaborator is not a party to the MTA, however, UK Biobank requires the Lead Collaborator to sign the MTA to acknowledge that the provisions of this MTA have been “read and understood” so that they are fully aware of the Collaborator’s obligations to both UK Biobank and to UK Biobank’s Participants. The Collaborator shall only be responsible for the conduct of the Lead Collaborator and any and all Collaborator Researchers involved in this Approved Research Project. For the avoidance of doubt, the Collaborator shall not be responsible for the obligations or the conduct of either (a) the Applicant, the Applicant Principal Investigator or the Applicant Researchers or (b) third party Collaborators, third party Lead Collaborators or third party Collaborator Researchers.

In the event that the related MTA with the Applicant is terminated (for whatever reason) then UK Biobank shall have the right to terminate this MTA forthwith on the provision of written notice to the Collaborator.

Structure of agreement

This MTA shall become effective on the Effective Date. If you have agreed a previous version of the MTA for this Application/Approved Research Project, the previous version shall automatically terminate on the Effective Date and be replaced by this MTA.

This MTA is conditional upon UK Biobank receiving from the Applicant within thirty (30) days of the Effective Date, cleared funds covering the Access Charges and any applicable VAT.

Standard terms and Annexes

The content of UK Biobank’s standard MTA, and the conditions contained within it, are non-negotiable.

This MTA incorporates the attached Collaborator Terms and Conditions (including any documents and/or the materials that are referred to in them), the contents of the Application Form (where applicable) and the attached Annexes:

- Annex 1 (Data Processing Description & UK Addendum);
- Annex 2 (Security Measures);
- Annex 3 (Collaborator Annual Confirmation Form Template); and
- Annex 4 (Approved Research Project – which summarises the Materials that will be made available to the Collaborator).

Definitions used in this MTA can be found on pages 15-17.

Yours sincerely

For and on behalf of UK Biobank
Jonathan Sellors
General Counsel & Company Secretary

Collaborator Terms and Conditions

1. Supply of Materials by UK Biobank

- 1.1 UK Biobank agrees to supply the Materials to the Collaborator in the timeframe and manner set out in this MTA, subject to the provisions of this MTA.
- 1.2 UK Biobank warrants to the Collaborator that for the purposes of this MTA:
 - 1.2.1 it is entitled to supply the Materials to the Collaborator;
 - 1.2.2 consent to take part in UK Biobank has been obtained from the Participants and further, consent under the Human Tissue Act 2004, has been obtained from the relevant Participants; and
 - 1.2.3 the use of the Materials for the Approved Research Project falls within UK Biobank’s generic Research Tissue Bank (RTB) approval from the NHS North West REC, available [here](#).
- 1.3 The Collaborator agrees that the Materials are provided on an “as is” basis without any warranty of satisfactory quality or fitness for a particular purpose or use, or that use of the Materials shall not infringe the rights of any third party. Except as expressly stated in this MTA, all warranties, terms and conditions, whether express or implied by statute, common law or otherwise, are excluded to the fullest extent permitted by law.

2. Usage of Materials by the Collaborator

- 2.1 The Collaborator agrees that the Materials shall only be used:
 - 2.1.1 in accordance with the terms and conditions of this MTA;
 - 2.1.2 to conduct the Approved Research Project for the Permitted Purpose only; and
 - 2.1.3 by the Collaborator Institution and on an individual level within the Collaborator, by the Lead Collaborator, the Collaborator Researchers and by Affiliates and Third Party Processors (appointed by the Collaborator).
- 2.2 The Collaborator shall not share, sub-license, disclose, transfer, sell, gift or supply the Materials to any other person or unauthorised third party.
- 2.3 Without prejudice to the other provisions of this MTA, any actual or anticipatory breach of any provision of clause 2.1 or 2.2 shall entitle UK Biobank to terminate this Agreement with immediate effect, and require the immediate return or destruction of any Materials provided by UK Biobank.
- 2.4 The Collaborator shall and shall procure that the Lead Collaborator, the Collaborator Researchers and any Affiliate and any Third Party Processors are made aware of, and shall comply with, the terms and conditions of this MTA and the Data Protection Legislation. Any act or omission of the Lead Collaborator or any Collaborator Researcher or any Affiliate or any Third Party Processor shall be deemed to be an act of the relevant Collaborator for which the relevant Collaborator is fully responsible and liable.
- 2.5 This MTA confers on the Collaborator only those rights that are expressly granted to the Collaborator. For the avoidance of doubt, nothing in this MTA shall prevent UK Biobank from supplying the same Materials (or other data and/or samples in the UK Biobank resource) to another third party, in line with the access procedures (available on UK Biobank’s website [here](#) as may be updated by UK Biobank from time to time) or for UK Biobank’s other operational purposes.
- 2.6 In relation to the Materials supplied to the Collaborator:
 - 2.6.1 UK Biobank is the owner of the Materials, and UK Biobank is the owner of the Intellectual Property Rights in the Materials; and
 - 2.6.2 UK Biobank hereby grants to the Collaborator a revocable, worldwide, royalty-free, non-exclusive, non-transferable licence (but not any ownership rights) during the Term to use the Materials for the Permitted Purpose, subject to the terms and conditions of this MTA.

3. Generation of data by the Collaborator

Generation of data by or on behalf of the Collaborator during the Approved Research Project

- 3.1 The data generated by the Collaborator in the performance of the Approved Research Project shall be deemed to fall into the following categories:
- 3.1.1 **Results Data:** data and methodology (for example, the SAS/R/Stata scripts) which underlie the Findings and which would enable another competent researcher to generate the Findings;
 - 3.1.2 **Findings:** the findings generated by the Collaborator as a result of the Approved Research Project; and/or
 - 3.1.3 **Other Data:** all other data generated by the Collaborator which is not in one of the above two categories.

Ownership of generated data

- 3.2 Except as provided in clause 3.3, the Collaborator shall own the IPRs in their Findings, the Results Data and the Other Data. The Collaborator hereby grants a perpetual, irrevocable, worldwide, fully paid up, royalty free, fully sub-licensable non-exclusive licence to UK Biobank to use, reproduce, distribute, publish, store and otherwise disseminate the Findings, the Results Data and the Other Data.
- 3.3 Nothing in this MTA shall operate to assign to the Collaborator any IPRs in the Materials. To the extent that the Findings, the Results Data or the Other Data incorporate any Materials, the IPRs in those Materials shall remain the property of UK Biobank and shall not belong to the Collaborator.
- 3.4 The Collaborator confirms to UK Biobank that UK Biobank’s receipt of and use of the Collaborator’s Findings and Results Data shall not infringe the rights, including any existing IPRs, of any third party. Such confirmation shall be:
- 3.4.1 deemed to be taken at the time, respectively, of the publication of the Findings or the return of the Results Data to UK Biobank; and
 - 3.4.2 given to the best of the Collaborator’s knowledge and belief, having made reasonable and diligent enquiry (but the extent of this obligation does not include any requirement on the Collaborator to conduct external patent searches).

Rights to inventions/developments made by the Collaborator

- 3.5 Subject always to the restriction in clause 3.7, UK Biobank confirms that it shall have no rights or licence to the IPRs in relation to any inventions made by the Collaborator as a result of using the Materials, Results Data, Findings or Other Data (“**Collaborator-Generated Inventions**”).
- 3.6 However, the Collaborator acknowledges that the UK Biobank resource has been (a) produced using a combination of the goodwill and contribution of 500,000 UK participants (b) charitable and public funding (from in particular Wellcome and the Medical Research Council) (c) the use of public resources (such as UK health-record data) and (d) established with the express purpose of promoting the conduct of health-related research which is in the public interest. UK Biobank also acknowledges the contribution which is being made to enhance the resource by the Collaborator (in the form of the generation and availability to other researchers of, inter alia, the Findings and Results Data of the Approved Research Project).
- 3.7 In terms of specific obligations, taking into account the acknowledgements in clause 3.6 above, the Collaborator agrees (and this clause is a material provision of this MTA) that it shall not and shall not attempt to:
- 3.7.1 file any patents with claims directed to; or
 - 3.7.2 otherwise seek to claim or enforce any IPRs in;

the genotype-phenotype data within the Materials or in the genotype-phenotype data which has been generated by (or on behalf of) the Collaborator in the course of the Approved Research Project (whether such genotype-phenotype data is in the form of Results Data, Findings or Other Data). Without limiting the above, the parties agree that this clause 3.7 shall not prohibit the Collaborator from patenting, or enforcing IPRs in drugs, therapeutics, diagnostics, other technology or methods of treatment provided this does not limit UK Biobank’s ability to allow approved researchers to use the data generated by the Collaborator (as defined in clause 3.1), including any biomarker data identified by the Collaborator, through its use of the UK Biobank resource.

Limitation on rights granted

- 3.8 UK Biobank expressly excludes (directly or indirectly) (i) any right of the Collaborator to sub-licence any of the rights granted to the Collaborator to the Materials under this MTA and/or (ii) any right of the Collaborator to publish or distribute any of the Materials, except for the sole purpose of including a commensurate amount of supporting data (which shall not include any Participant Level Data) in the Collaborator's publication of its Findings (which may include commensurate publication of certain of the Results Data, as the same may be reasonably required by the relevant publisher).
- 3.9 For the avoidance of doubt, the rights granted under this MTA to the Collaborator to use the Materials are for the Permitted Purpose only.

4. Confirmations from the Collaborator

General

- 4.1 The Collaborator hereby confirms to UK Biobank that all work performed by it using the Materials shall be carried out in compliance with all applicable laws, regulations, guidelines and approvals, including without limitation the Human Tissue Act 2004, the Data Protection Legislation and any approvals required from a Research Ethics Committee (or the applicable equivalent in the jurisdiction where the Approved Research Project is to be conducted).

Security

- 4.2 The Collaborator shall retain the Materials in a secure network system, at such standard which would be reasonably expected for the storage of valuable and proprietary sensitive/confidential data. Further, the Collaborator shall be obliged to implement the appropriate technical and organisational measures as set out in Annex 2 (Security Measures) to protect the Materials from the accidental or unlawful destruction, loss, alteration, unauthorised disclosure of, or access to the Materials (a "**Data Security Incident**"). By signing this MTA, the Lead Collaborator confirms that the Security Measures set out in Annex 2 are in place in order to protect the Materials.
- 4.3 The Collaborator shall notify UK Biobank without undue delay (and in any event no later than 24 hours) after becoming aware of a reasonably suspected "near miss" or actual Data Security Incident which affects the Materials. Such notification must be sent by email to DPO@ukbiobank.ac.uk with a copy to access@ukbiobank.ac.uk.
- 4.3.1 The Collaborator shall not delay such notification on the basis that the information is incomplete or the relevant investigation is ongoing. Further, the Collaborator shall not make any external announcement, notifications to a supervisory authority or regulator about any such Data Security Incident without the express prior written consent of UK Biobank, unless required by law to do so.
- 4.3.2 Both parties shall cooperate and provide reasonable assistance to each other to facilitate the handling of the Data Security Incident.

Withdrawal of consent by participants

- 4.4 The Collaborator confirms that it shall deal promptly and appropriately (in accordance with the Participants option to withdraw as set out on the UK Biobank website [here](#)) with any "no further use" withdrawals by Participants which UK Biobank notifies to the Collaborator.

Identification of participants

- 4.5 The Collaborator is expressly prohibited from (or attempting to):
- 4.5.1 developing, linking or re-engineering the Materials supplied to it so as to identify (directly or indirectly) any Participant;
- 4.5.2 identifying any Participant from the Materials provided by UK Biobank; or
- 4.5.3 contacting any Participant.
- 4.6 In the event that the Collaborator inadvertently identifies any Participant then it shall notify UK Biobank immediately setting out (in reasonable detail) the circumstances by which it happened. Such notification must be sent by email to DPO@ukbiobank.ac.uk with a copy to access@ukbiobank.ac.uk.
- 4.7 Other than for the purposes of clause 4.6, the Collaborator shall not:
- 4.7.1 share the identification of that Participant with any other person; or

4.7.2 attempt to contact the Participant themselves.

4.8 Without prejudice to the other provisions of this MTA, any actual or anticipatory breach of any provision of clauses 4.1, 4.2 and 4.4 to 4.7 inclusive shall entitle UK Biobank to terminate this Agreement with immediate effect and require the immediate return or destruction of any Materials provided by UK Biobank.

5. **Publication of lay summary and return and publication of Findings**

Publication of summary on UK Biobank’s website

5.1 After the Collaborator has received the Materials for the Approved Research Project, UK Biobank shall be entitled to publish on its website:

5.1.1 the lay summary of the Approved Research Project contained in the Application (with the exception of any material that has been agreed by UK Biobank would be kept confidential); and

5.1.2 summary details of the Collaborator.

Project Updates

5.2 From time to time during the Term, UK Biobank shall be entitled to ask the Lead Collaborator to provide UK Biobank with reasonably detailed updates on the progress of the Approved Research Project which shall include the Findings the Collaborator has made which in its reasonable view may be:

- (a) published or pending publication;
- (b) disclosed in a published patent; or
- (c) otherwise of significance (in the context of medical research); and

5.2.1 a summary (and a copy of the application if requested) of any patents whose claims cover, or are intended to cover, a Collaborator-Generated Invention within two (2) months of their publication.

5.3 In relation to the project updates provided by the Lead Collaborator as set out in clause 5.2 above:

5.3.1 UK Biobank shall have the ability to make a summary of the project updates public, subject to the Collaborator (as referred to in clause 5.5 below) retaining a reasonable period of confidentiality on items where patent rights still need to be filed; and

5.3.2 UK Biobank shall have the opportunity to ask the Collaborator any reasonable questions arising from the project updates and the Collaborator shall respond to such questions in a timely manner.

Publication of Findings

5.4 The Collaborator shall use All Reasonable Endeavours to publish the Findings (and provide UK Biobank with a link thereto) within six (6) months after the Completion Date for the Approved Research Project:

5.4.1 in an academic journal; or

5.4.2 on an open-source publication site.

5.5 UK Biobank acknowledge and agree that the Collaborator may keep such Findings confidential for a reasonable time in accordance with its reasonable research and development practices. For the avoidance of doubt, the Collaborator is entitled to retain confidentiality regarding any Finding over which patent protection is being sought (and the patent has not yet been published).

5.6 If such Findings are made publicly available, UK Biobank requires that the Results Data underlying such Findings shall be promptly returned or otherwise made available to UK Biobank¹. UK Biobank also requires that the Results Data are returned in a format which is appropriate and comprehensible

¹ For the avoidance of doubt, the intention of this provision is not to require the return of irrelevant or extraneous data sets but rather to make summary information available to other researchers (in a comparable form to that which academic journals often require), in particular so that it is not necessary for a researcher (reviewing the Findings) to have to re-create certain derived variable or related metrics. Also, for clarity, Collaborators shall have no obligation to provide to UK Biobank or publish, and do not grant UK Biobank any rights in or to, any genotype-phenotype data obtained or generated outside of the Approved Research Project.

(particularly for other researchers) along with any documentation which would be reasonably necessary to enable another researcher to interpret and understand the Results Data.

- 5.7 Within six (6) months after the publication of the Findings, the relevant Collaborator shall provide to UK Biobank the Results Data in such form and format as set out in clause 5.6 above (alternatively UK Biobank and the relevant Collaborator may agree that the relevant Collaborator retains the Results Data on the basis that they are made publicly available to other Researchers and/or publicly available generally).
- 5.8 UK Biobank shall consider reasonably any written requests (containing an appropriate explanation) for an extension of the time limits set out in this clause.
- 5.9 The Collaborator shall use All Reasonable Endeavours to publish a commensurate level of Findings in relation to the Approved Research Project within the first three (3) years of the Term (and in any subsequent extensions). Where this is not possible, the Collaborator shall provide UK Biobank with a reasonable explanation as to why it is not possible and an estimation of when a publication can be expected.

Notification to UK Biobank

- 5.10 Unless otherwise stated in Annex 4, the Collaborator is not required to obtain UK Biobank’s approval to any report of its Findings. The Collaborator shall nevertheless provide a copy of any report of its Findings and any press release to UK Biobank at least two (2) weeks before their expected date of first public presentation or publication in any format (e.g. paper journal, on-line report, meeting abstract). The Collaborator shall upload such documents to AMS in the first instance. If this is not possible, the Collaborator shall email such documents to access@ukbiobank.ac.uk.
- 5.11 However, and notwithstanding the provisions of clause 5.10 above, the Collaborator is required to promptly notify UK Biobank in advance (in writing) if any report of its Findings is reasonably likely to provoke controversy or otherwise attract significant public attention. In such circumstances, UK Biobank reserves the right to make such recommendations, reservations or suggestions on the report as it sees fit (and which it may make public) for consideration by the Collaborator.

Credit to UK Biobank

- 5.12 UK Biobank requires that the term “UK Biobank” is incorporated within the title and/or the abstract of any and all publications.
- 5.13 UK Biobank requires that any and all publications of Findings using UK Biobank data include the following credit, which should be incorporated within the “Acknowledgements” of such publication:

“This research has been conducted using the UK Biobank Resource under application number [].”
- 5.14 This acknowledgement to UK Biobank should, when possible, be linked to reference search tools (such as PubMed and MEDLINE and/or DOI reference).

6. Charges

- 6.1 The Access Charges (and applicable VAT) for the Approved Research Project are payable by the Applicant. Further, the Access Charges (and applicable VAT) payable in respect of adding the Collaborator to the Approved Research Project are also payable by (or on behalf) of the Applicant and shall be paid to UK Biobank no later than thirty (30) days from the Effective Date.
- 6.2 The rights granted to the Collaborator by UK Biobank under this MTA are conditional on the Access Charges (and applicable VAT) being paid and so, for the avoidance of doubt, no Materials shall be provided to the Collaborator until or unless the Access Charges (and applicable VAT) are received in full.
- 6.3 If payment of the Access Charges has not been made within ninety (90) days of receipt of this MTA by the Collaborator, UK Biobank reserves the right to remove approval for the Collaborator to access the UK Biobank resource and Materials.

7. Annual Confirmation and Audit

- 7.1 During the Term, UK Biobank requires the Lead Collaborator to confirm on an annual basis that the Approved Research Project remains compliant with the provisions of the MTA (and the Annexes). Specifically, the Lead Collaborator shall provide UK Biobank with such confirmation as part of the Annual Confirmation Form in the form attached at Annex 3.

- 7.2

In the event that the Annual Confirmation Form is not received by UK Biobank in the timeframe, manner and form prescribed, then the Collaborator’s rights under this MTA shall be suspended and the Collaborator will not be able to download further data (either in terms of new data fields or updates of existing data fields) or access existing data via the research access platform until such time as the Annual Confirmation Form has been duly and compliantly provided. If the Annual Confirmation Form is still outstanding, notwithstanding reminders from UK Biobank, 3 months after the relevant anniversary of the Effective Date, then UK Biobank has the right to terminate this MTA by giving the Collaborator written notice of termination and/or prevent the Collaborator Institution (or Lead Collaborator) from applying for or accessing any further Materials from UK Biobank.
- 7.3

In circumstances where UK Biobank reasonably believes that a Data Security Incident or other serious incident has occurred then, on notice to the Collaborator, in order to confirm or investigate compliance with the provisions of this MTA, UK Biobank may itself or via appropriate third parties:

7.3.1

choose to undertake an audit (either in person or remotely) in order to review the security, storage or other arrangements for the Materials; and

7.3.2

request such additional information about the Approved Research Project and/or its progress as UK Biobank may, from time to time, reasonably require.
- 7.4

UK Biobank shall bear the costs of such audits unless a material default within the procedures and processes of the relevant Collaborator is discovered, in which case the relevant Collaborator shall be obliged to reimburse the reasonable costs of UK Biobank and any relevant third parties.
- 7.5

UK Biobank confirms that its audit rights shall be exercisable no more than once a year and on the provision of reasonable notice (which may be immediate in the event of a Data Security Incident or other serious incident) to the Collaborator. As far as practically possible, UK Biobank agrees to coordinate any site visits and audits with the other relevant parties.

8. Confidentiality

- 8.1

Subject to the exceptions in clause 8.2, UK Biobank shall keep confidential any information disclosed to it in writing by the Collaborator that is marked confidential (“**Collaborator’s Confidential Information**”) and shall not disclose such information to any person.
- 8.2

UK Biobank may disclose the Collaborator's Confidential Information where expressly permitted by this MTA or when:

8.2.1

it is required to be disclosed by law, by any governmental or other regulatory authority, by a court or other authority of competent jurisdiction; or

8.2.2

it can be shown by UK Biobank (to the Collaborator’s reasonable satisfaction) to have been known by UK Biobank before disclosure to it by such Collaborator; or

8.2.3

it was lawfully disclosed to UK Biobank by a third party who did not impose any restrictions on its disclosure; or

8.2.4

the information was in (or enters into) the public domain other than by reason of a breach of this clause by UK Biobank; or

8.2.5

UK Biobank and the Collaborator agree, acting reasonably, that such information is trivial or obvious, or they agree in writing that such disclosure may be permitted.

9. Data Protection

Relationship of the parties²

² This clause 9 addresses the requirements of the prevailing data protection legislation in the UK: principally the Data Protection Act 2018 (<https://www.legislation.gov.uk/ukpga/2018/12/contents>) and the UK GDPR and related guidance from the relevant regulators, particularly the ICO (<https://ico.org.uk/>). This clause also addresses the impact, from UK Biobank’s perspective, of the United Kingdom leaving the European Union. In relation to identifiable data two factors remain the same as under the original MTA:

- UK Biobank has and will continue to go to significant lengths to de-identify the data it releases to researchers, by removing direct and indirect identifiers, such that (even taking into account publicly available information) it should not be possible for a researcher to re-identify a participant;
- Further, the Collaborator is expressly prohibited from actual (and making any attempt at) re-identification any Participant in accordance with clause 4.5 of the MTA.

Nevertheless, UK Biobank considers that it is appropriate for UK Biobank to require researchers to treat the UK Biobank data as if it is personal data, which requires the Collaborator to agree to the provisions of this clause. The Collaborator will be considered to be a separate and independent data controller (and not a data processor) under Data Protection Legislation. Please see the FAQs on the UK Biobank website (which shall be updated by UK Biobank from time to time)

- 9.1 The parties acknowledge that UK Biobank and the Collaborator are independent controllers with respect to the Participant Level Data that is processed in accordance with this MTA, and that the Collaborator shall process the Participant Level Data strictly for the Permitted Purpose. In no event shall the parties process the Participant Level Data as joint controllers.
- 9.2 Each party shall be individually and separately responsible for complying with the obligations that apply to it as a controller under Data Protection Legislation³.

Cooperation

- 9.3 In the event that the Collaborator, Lead Collaborator or any Collaborator Researcher receives any correspondence, enquiry or complaint from a Participant, regulator or other third party ("**Correspondence**") in connection with the processing of the Participant Level Data, it shall promptly inform UK Biobank giving full details of the same. In all circumstances, the Collaborator, Lead Collaborator or any Collaborator Researcher shall: (i) obtain UK Biobank's written approval before responding to the Correspondence, including approval of the contents of any response; and (ii) subject to Data Protection Legislation, permit UK Biobank to respond directly to the Correspondence.

Where the Collaborator is located outside of the UK

- 9.4 Where UK Biobank transfers Participant Level Data to a Collaborator outside the UK to a territory that has not been specified as ensuring an adequate level of protection in accordance with Data Protection Legislation, the parties agree that the UK Addendum shall be automatically incorporated into this MTA by reference and deemed to be completed as set out in Part B of Annex 1 of this MTA.
- 9.5 If there is any conflict between the MTA and the UK Addendum, the UK Addendum will prevail.

International transfers by the Collaborator

- 9.6 The Collaborator shall not process any Participant Level Data (nor permit any Participant Level Data to be processed) in a territory outside of the UK (or where clause 9.4 applies, where processing occurs in a subsequent territory) unless it has taken such measures as are necessary to ensure the transfer is in compliance with Data Protection Legislation.

10. Limitation of Liability

- 10.1 The parties agree that:
 - 10.1.1 subject to clauses 10.2, 10.3 and 10.4, UK Biobank’s maximum aggregate Liability under this MTA and/or in relation to the Approved Research Project shall be limited to the Access Charges paid or payable by the Collaborator to UK Biobank (whether or not invoiced to the Collaborator) in relation to the Approved Research Project; and
 - 10.1.2 subject to clauses 10.2, 10.3 and 10.5, the Collaborator's maximum aggregate Liability under this MTA and/or in relation to the Approved Research Project shall be limited to the Access Charges paid or payable by the Collaborator to UK Biobank (whether or not invoiced to the Collaborator) in relation to the Approved Research Project.
- 10.2 Notwithstanding clause 10.1 above, UK Biobank shall have no Liability to the Collaborator and the Collaborator shall have no Liability to UK Biobank for any:
 - 10.2.1 loss of profit (whether direct, indirect or consequential);
 - 10.2.2 loss of use, loss of revenue, loss of production or loss of business (in each case whether direct, indirect or consequential);
 - 10.2.3 loss of goodwill, loss of reputation or loss of opportunity (in each case whether direct, indirect or consequential);
 - 10.2.4 loss of anticipated savings or loss of margin (in each case whether direct, indirect or consequential);
 - 10.2.5 loss of use or value of any data or software (in each case whether direct, indirect or consequential); or

³ <https://ico.org.uk/for-organisations/guide-to-data-protection/guide-to-the-general-data-protection-regulation-gdpr/controllers-and-processors/what-does-it-mean-if-you-are-a-controller/#1>

- 10.2.6 indirect or consequential loss.
- 10.3 Nothing in this MTA shall operate to exclude or limit any Liability which cannot legally be limited including but not limited to liability for:
 - 10.3.1 death or personal injury caused by negligence;
 - 10.3.2 for its fraud or fraudulent misrepresentation; and
 - 10.3.3 for any matter for which it is not permitted by law to exclude or limit, or to attempt to exclude or limit, its Liability.
- 10.4 For the avoidance of doubt, UK Biobank shall have no responsibility or Liability (including but without limitation any product-related Liability) for any finding, product, test or treatment developed directly or indirectly by the Collaborator using the Materials.
- 10.5 Nothing in this MTA shall operate to exclude or limit the Collaborator’s Liability to UK Biobank for any loss, damage, costs or expenses arising from:
 - 10.5.1 the Collaborator’s failure to comply with clause 9 (Data Protection) and clauses 14.5 to 14.10 inclusive (Third Party Processors);
 - 10.5.2 any breach of clause 2.2 or any circumstance in which the Collaborator sub-licenses, distributes or otherwise shares the Materials (including any IPRs) with any unauthorised person or third party;
 - 10.5.3 any circumstance set out in clauses 4.5 and 4.7; and
 - 10.5.4 any Data Security Incident which is caused by the Collaborator.

11. Term

- 11.1 The term of this MTA shall commence on the Effective Date and shall end on the Completion Date unless terminated sooner in accordance with clause 12 or in accordance with law. The Collaborator’s Completion Date shall be the same date as the Applicant’s Completion Date for the Approved Research Project.
- 11.2 The Term of this MTA may be extended by the Collaborator (and with the agreement of UK Biobank) during the final year of the Approved Research Project in the following one (1) year increments:
 - 11.2.1 for a minimum of period of one (1) year;
 - 11.2.2 for a period of two (2) years; or
 - 11.2.3 for a maximum period of three (3) years;on application to UK Biobank setting out (in reasonable detail) the reasons for the extension request and subject to the payment of the relevant further Access Charges. For the avoidance of doubt, any extension request submitted by the Collaborator must be for the same period as that requested by the Applicant.
- 11.3 For the avoidance of doubt, the extensions set out in clause 11.2 above can be applied cumulatively (subject to applicable Access Charges) so that, for example, an extension of 3 years may be granted to take the Approved Research Project duration from 3 years to 6 years, and this may then be extended by a further 3 years to 9 years and so on.

12. Termination and consequences of termination

- 12.1 UK Biobank shall be entitled to terminate this MTA immediately by written notice to the Collaborator if:
 - 12.1.1 the Collaborator commits any breach of a material provision of this MTA or a material breach of this MTA, and, in the case of a breach capable of remedy, fails to remedy the same within 10 days after receipt of a written notice giving particulars of the breach and requiring it to be remedied;
 - 12.1.2 the Collaborator ceases, is likely to cease, or threatens to cease carrying on business or suffers an Insolvency Event, or is subject to a serious, adverse regulatory finding; or
 - 12.1.3 the Applicant’s MTA is terminated (for whatever reason).

- 12.2 Upon expiry of the MTA pursuant to clause 11.1 above or termination of this MTA by UK Biobank pursuant to clause 12.1 or in accordance with law:
- 12.2.1 the grant of rights and all licences to the Collaborator under this MTA shall be automatically terminated; and
- 12.2.2 the Collaborator shall destroy the Materials or otherwise render them permanently inaccessible and confirm in writing to access@ukbiobank.ac.uk that this has been done. For the avoidance of doubt, the Collaborator shall not be required to destroy Results Data or Other Data subject to the provisions of this MTA being complied with.
- 12.3 Without prejudice to the foregoing and to any other rights or remedies that UK Biobank may have, UK Biobank may take the following steps if there is a breach that entitles UK Biobank to terminate this MTA under clause 12.1:
- 12.3.1 it may prohibit the Lead Collaborator, Collaborator Researchers and any other researchers from the Collaborator Institution from accessing any further Materials from within the UK Biobank resource for an indefinite period of time; and/or
- 12.3.2 it may elect to inform the relevant personnel within the defaulting Collaborator Institution, funders of the defaulting Lead Collaborator and/or governing or other relevant regulatory bodies.
- 12.4 Notwithstanding termination of this MTA for any reason, the provisions of clauses 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16 and 17 shall continue in force in accordance with their respective terms.
- 12.5 Termination or expiry of this MTA shall not affect the rights and obligations of the parties accrued at the date of termination or expiry.

13. Notices

- 13.1 Notices required under this MTA shall be in writing and shall be:
- 13.1.1 sent by email to the addresses set out below; or
- 13.1.2 (in the event of failure to deliver an email) by post to the registered address of UK Biobank or the Collaborator.
- 13.2 Any notice shall be deemed to be received:
- 13.2.1 if sent by email, upon receipt at the recipient’s email server, (or, if this time falls outside business hours in the place of receipt, when business hours resume); or
- 13.2.2 if sent by post, on the date of delivery if a business day in the place of receipt (or, if not a business day, on the first business day thereafter).
- 13.3 Notices to UK Biobank shall be sent to the access team at access@ukbiobank.ac.uk. Notices to the Collaborator shall be sent by email to the relevant Collaborator and the Lead Collaborator.

14. Affiliates, assignment and sub-contracting

Affiliates

- 14.1 The rights granted to the Collaborator under this MTA for the Approved Research Project include the Affiliates of the Collaborator, subject to the Collaborator:
- 14.1.1 providing updated details of each Affiliate in the Annual Confirmation Form submitted to UK Biobank on an annual basis in accordance with clause 7.1 of the MTA;
- 14.1.2 remaining fully liable and responsible to UK Biobank for all acts, defaults and omissions of each of its Affiliates as if they were the Collaborator’s own; and
- 14.1.3 ensuring that each of its Affiliates comply with the terms and conditions of this MTA.

Assignment

- 14.2 Neither UK Biobank nor the Collaborator shall be entitled to assign this MTA or any of its rights or obligations hereunder without first having received the written approval of the other party, such approval not to be unreasonably withheld or delayed.

Subcontracting

- 14.3
- Other than in the circumstances set out in clause 14.5, the Collaborator shall not sub-contract the performance of any of its obligations under the MTA or any part thereof without having first obtained the prior written consent of UK Biobank, such consent not to be unreasonably withheld.
- 14.4
- In the event that consent is granted under clause 14.3, the relevant Collaborator shall be responsible for the acts, defaults and omissions of its sub-contractors as if they were the Collaborator’s own, and any consent given shall not relieve such relevant Collaborator of any of its obligations under this MTA.

Third Party Processors

- 14.5
- UK Biobank acknowledges and agrees that the Collaborator may subcontract to third party processors to process the Materials strictly for the Permitted Purpose and only in relation to discrete elements of data computation and analysis (such processors being, "**Third Party Processors**"). The Collaborator must comply with, and only engage Third Party Processors strictly in accordance with the terms set out in clauses 14.6 to 14.10 inclusive.
- 14.6
- The Collaborator warrants that the Third Party Processor is not a Collaborator and shall only be engaged for the purposes of discrete elements of data computation and analysis in relation to the Permitted Purpose (the "**Processor Task**").
- 14.7
- Prior to engaging a Third Party Processor, the Collaborator shall conduct and document the following assessment:
- 14.7.1
- whether the Third Party Processor is necessary for the progress of the research aims of the Approved Research Project;
- 14.7.2
- whether the Third Party Processor is a suitable recipient for the data in terms of both its provenance on past data security and past data usage / activities (for example Cambridge Analytica would not qualify); and
- 14.7.3
- whether the Third Party Processor is able to provide sufficient assurance(s) that it shall process the Materials in a manner that will meet the requirements of Data Protection Legislation.
- 14.8
- The Collaborator shall:
- 14.8.1
- remain fully responsible to UK Biobank for all acts, defaults and omissions of the Third Party Processor as if they were the Collaborator's own;
- 14.8.2
- provide only such Materials to the Third Party Processor as is strictly necessary for the Third Party Processor to perform the Processor Task;
- 14.8.3
- provide details of each Third Party Processor and the Processor Task in the Annual Confirmation Form submitted to UK Biobank on an annual basis in accordance with clause 7.1 of the MTA; and
- 14.8.4
- only engage the Third Party Processor on the basis that a written agreement with the Third Party Processor is executed prior to any data transfer or processing of Materials taking place. Such agreement must include inter alia:
- (a)
- a clear definition and scope of the Processor Task, including an agreement only to process the data in accordance with the Collaborator’s documented instructions;
- (b)
- to authorise the Third Party Processor only to undertake the Processor Task and not to perform any other act, unless expressly authorised to do so;
- (c)
- to store, process and use the Materials to the security standards set out in the MTA (as a minimum) and implements appropriate technical and organisational security measures to protect the Materials against a Data Security Incident;
- (d)
- to delete (or render permanently inaccessible) the Materials (and any data generated as a result of the Processor Task) once the Processor Task has been completed;
- (e)
- to confirm that the Third Party Processor has no rights (directly or indirectly) in either any Materials (or data derived therefrom) or from anything which the Collaborator has created or done as part of the Approved Research Project (which is covered by the MTA between UK Biobank and the Collaborator);

- (f) to confirm that the Third Party Processor is bound by the provisions which are equivalent to the relevant provisions in the MTA, including, but not limited to: a) not to transfer the Materials (or data derived therefrom) to any third party and b) not to make any attempt to re-identify any Participant;
 - (g) that the Third Party Processor provides sufficient assurance(s) that it shall process the Materials in a manner that will meet the requirement of Data Protection Legislation; and
 - (h) that the Collaborator has an unfettered unilateral right to terminate its agreement with the Third Party Processor immediately if a material problem arises (including a breach by the Third Party Processor of any of the above provisions).
- 14.9 The Collaborator must keep the activities of the Third Party Processor under reasonable review in order to ensure compliance with clauses 14.5 to 14.10 inclusive.
- 14.10 In the event that UK Biobank raises any concern regarding the identity of the Third Party Processor or the activities of a Third Party Processor, the Collaborator shall investigate and report on the matter promptly. UK Biobank may require, if reasonably necessary (and subject to a dialogue with the Collaborator), the Collaborator to:
 - 14.10.1 to audit the Third Party Processor; and / or
 - 14.10.2 terminate the agreement with the Third Party Processor.

15. Force majeure

- 15.1 If a party is prevented from, hindered or delayed in performing any of its obligations under this MTA by reason of a Force Majeure Event, such party shall promptly notify the other of the date of its commencement and the effects of the Force Majeure Event on its ability to perform its obligations under this MTA. If mutually agreed by the parties, then the obligations of the party so affected shall thereupon be suspended for so long as the Force Majeure Event may continue.
- 15.2 The party affected by a Force Majeure Event shall not be liable for any failure to perform or delay in performing such of its obligations as are prevented, hindered or delayed by the Force Majeure Event provided that such party shall use every reasonable effort to minimise the effects thereof and shall resume performance as soon as possible after the removal of such Force Majeure Event. If the period of non-performance exceeds 90 days from the start of the Force Majeure Event then the non-affected party shall have the option, by written notice to the other party, to terminate this MTA by giving thirty (30) days’ written notice to the other party.
- 15.3 The provisions of this clause 15 shall not affect any other right which any party may have to terminate this MTA.

16. Dispute resolution

- 16.1 If a Dispute arises, the parties shall follow the procedure set out in this clause 16.
- 16.2 Either party may give the other party written notice of a Dispute, setting out its nature and full particulars ("**Notice of Dispute**"), together with relevant supporting documents. Within five (5) business days of service of the Notice of Dispute, a UK Biobank representative and a representative from the Collaborator shall attempt in good faith to resolve such Dispute.
- 16.3 If for any reason the respective representatives of the parties are unable to resolve the Dispute within ten (10) business days of the Notice of Dispute, then any of the parties involved in the respective Dispute may refer it for discussion by UK Biobank's Principal Investigator and appropriate senior officer(s) of the Collaborator. These senior representatives of the parties (or their respective nominees) shall seek to arrange a meeting or telephone or videoconference call promptly with a view to resolving the Dispute.
- 16.4 If, following escalation of any Dispute as set out in clause 16.3, UK Biobank's Principal Investigator and appropriate senior officer(s) of the Collaborator are for any reason unable to resolve the Dispute within thirty (30) business days of it being escalated to them, then the parties agree to enter into mediation in good faith to settle the Dispute in accordance with the Centre for Effective Dispute Resolution (CEDR) Model Mediation Procedure. Unless otherwise agreed between the parties within 20 business days of service of the Notice of Dispute, the mediator shall be nominated by CEDR. To initiate the mediation, a party must serve notice in writing to the other party to the Dispute, referring the Dispute to mediation.
- 16.5 For avoidance of doubt, Disputes with respect to scientific or technical issues or business decisions, and not legal issues, shall remain with senior representatives to be resolved.

- 16.6

If the Dispute is not settled by mediation within 10 business days of commencement of mediation or within such further period as the parties may agree in writing, either party may issue court proceedings in accordance with clause 17.10 of this MTA.
- 16.7

Nothing in this clause 16 shall serve to prevent any of the parties from seeking interim/injunctive relief to protect its rights and interests in any court of England and Wales; provided that such relief shall not prevent or stay any mediation.
17.

General
- 17.1

The parties agree that the Collaborator may change the Lead Collaborator at any time, and from time to time, by written notice to UK Biobank.
- 17.2

This MTA governs and constitutes the entire agreement between the parties and supersedes, replaces and extinguishes all previous agreements, promises, assurances, warranties, representations and understandings between them (whether oral or written) relating to the subject matter hereof. Further, each party acknowledges and agrees that it does not rely on, and shall have no remedy in respect of, any statement, promise, assurance, statement, warranty, undertaking or representation made (whether innocently or negligently) by the other party or any other person except as expressly set out in this MTA in respect of which its sole remedy shall be for breach of contract.
- 17.3

If there is any conflict between the provisions of this MTA and any of the Annexes, then the provisions of the relevant Annex shall apply.
- 17.4

A waiver, delay or forbearance by any party, whether express or implied, in enforcing or exercising any of its rights or remedies hereunder shall not constitute a waiver of such right or remedy, unless set forth in a writing signed by the waiving party.
- 17.5

No provision of this MTA is intended to be enforceable by any person who is not a party to this MTA and nor are any rights granted to any third party under statute or otherwise.
- 17.6

Nothing in this MTA shall create a partnership, joint venture or relationship of agency among the parties.
- 17.7

All variations to this MTA must be agreed, set out in writing and signed on behalf of the parties before they take effect.
- 17.8

If any provision or part-provision of this MTA is or becomes invalid, illegal or unenforceable, it shall be deemed deleted, but that shall not affect the validity and enforceability of the rest of this MTA.
- 17.9

If any provision or part-provision of this MTA is deemed deleted under clause 17.8, the parties shall negotiate in good faith to agree a replacement provision that, to the greatest extent possible, achieves the intended commercial result of the original provision.
- 17.10

This MTA and any dispute or claim (including non-contractual disputes or claims) arising out of or in connection with it or its subject matter or formation shall be governed by and construed in accordance with the laws of England and Wales. Subject to clause 16 above, the parties irrevocably agree that the English courts shall have exclusive jurisdiction over any suit, action, proceedings or dispute arising out of, or in connection with this MTA or its subject matter or formation.

This MTA is executed by duly authorised representatives of the parties.

For and on behalf of UK Biobank:	For and on behalf of the Collaborator Institution:
Signature:	Signature:
Print name:	Print name:
Position:	Position:
Date:	Date:

New Collaborator MTA – Data Only (2022)

I am the Lead Collaborator of this Approved Research Project and by signing below I confirm that I have read and understood the provisions of this MTA.

Signature:

DocuSigned by:

Professor Antinisca Di Marco

4AA98222A0604FF...

Print name: Antinisca Di Marco

Position: Associate Professor

Date: 19/10/2022

Definitions

Access Charges: the charges payable by the Applicant (which may include VAT) to access the Materials and to allow the Collaborator access to the Materials as summarised in Annex 4 and detailed in the payment section of the Application on AMS.

Affiliate: any company or other entity that is directly or indirectly Controlling, Controlled by or under common Control with a Collaborator (which includes if such Collaborator is a company, a subsidiary or parent or holding company of such Collaborator, or a subsidiary of such parent or holding company) for so long as such Control exists.

All Reasonable Endeavours: in respect of a party obliged to use “All Reasonable Endeavours”, the pursuance of a reasonable course of action to achieve the stated outcome which may require reasonable expenditure, but does not require the party to pursue every available course of action to achieve the outcome or act outside its own operational or commercial interests.

AMS: the online Access Management System the Collaborator uses to apply for and manage its access to the UK Biobank resource.

Applicant or Applicant Institution: the organization (e.g. University, company or other identifiable legal entity) with whom the Collaborator is collaborating with in respect of the Approved Research Project and by which an Applicant PI is employed or otherwise contractually attached.

Application: the application by the Lead Collaborator and their Institution to UK Biobank for access to the Materials for use in relation to the Approved Research Project.

Applicant Principal Investigator or Applicant PI: the Applicant’s principal investigator of the Approved Research Project.

Applicant Researcher: a researcher at the Applicant who is working with an Applicant PI on the Approved Research Project.

Approved Research Project: the research project approved by UK Biobank (specifically including any conditions or stipulations made by UK Biobank) and as set out in Annex 4.

Collaborator or Collaborator Institution: the organization (e.g. University, company or other identifiable legal entity) which employs the Lead Collaborator who is making the Application to collaborate with the Applicant and Applicant PI on the Approved Research Project.

Collaborator’s Confidential Information: as defined in clause 8.1 of this MTA.

Collaborator-Generated Inventions: as defined in clause 3.5 of this MTA.

Collaborator Researcher: a researcher who is working with the Lead Collaborator at a Collaborator Institution on the Approved Research Project.

Completion Date: the date or dates contained within Annex 4 for the end-date of the Approved Research Project, including any extensions.

Control: means the direct or indirect ownership of at least fifty percent (50%) of the outstanding shares or other voting rights of the subject entity having the power to vote on or direct the affairs of the entity (or such lesser percentage which is the maximum allowed to be owned by a foreign company in a particular jurisdiction), and “Controlling” and “Controlled” shall be construed accordingly.

controller, processor, data subject, personal data, processing (and process) and special categories of personal data: have the meanings given in Data Protection Legislation;

Data Protection Legislation: means all laws applicable (in whole or in part) to a party's processing of personal data under or in connection with this MTA, and including, as applicable: (i) the GDPR as it forms part of UK law by virtue of section 3 of the European Union (Withdrawal) Act 2018 (the "UK GDPR"); (ii) the UK Data Protection Act 2018; (iii) the Privacy and Electronic Communications (EC Directive) Regulations 2003 as they continue to have effect by virtue of section 2 of the European Union (Withdrawal) Act 2018; and (iv) any other laws in force in the UK from time to time applicable (in whole or in part) to the processing of personal data, in each case as amended or superseded from time to time.

Data Security Incident: as defined in clause 4.2 of the MTA.

Dispute: any dispute, controversy, proceeding or claim (including any legal disputes) between UK Biobank, on the one hand, and the Collaborator, on the other hand, arising out of or in connection with this MTA or the performance, validity or enforceability of it.

Effective Date: the date on which this MTA is executed by an authorised signatory of UK Biobank, having already been signed by the Collaborator Institution and signed as “read and understood” by the relevant Lead Collaborator.

Findings: as defined in clause 3.1.2 of this MTA and shall mean literally what is found, in terms of conclusions and results, by the Collaborator as a result of the Approved Research Project. For clarity, Findings do not include Collaborator-Generated Inventions and nor do they include findings which result from data which is not UK Biobank Materials.

Force Majeure Event: any cause which arises from or is attributable to acts, events, omissions or accidents beyond the reasonable control of the affected party including without limitation act of God, war, riot, civil commotion, non-performance by sub-contractors or suppliers, compliance with any law or governmental order, rule, regulation or direction, accident, breakdown of plant or machinery, supply failure, epidemic, pandemic, fire, flood or storm.

Insolvency Event: means where a person is unable to pay its debts within the meaning of the Insolvency Act 1986 section 123 (without the need for a determination by a court), has an administrator, receiver, administrative receiver or manager appointed over the whole or any part of its assets, enters into any composition with creditors generally, or has an order made or resolution passed for it to be wound up (unless as part of any scheme for solvent amalgamation or solvent reconstruction) or undergoes any similar or equivalent process in any jurisdiction or undergoes any other arrangement which affects the rights of creditors;

Intellectual Property Rights or IPRs: all existing and future intellectual property rights including but not limited to patents, trade and service marks, design rights, copyright, database rights, trade secrets and know-how, in all cases whether registered or not or registerable, and including all registrations and applications for registrations of any of these and rights to apply for the same as well as any renewals, extensions, continuations, combinations or divisions thereof, and all rights and forms of protection of a similar nature or having equivalent or similar effect to any of these anywhere in the world.

Lead Collaborator: the lead investigator in respect of the Application at the Collaborator Institution.

Liability: liability arising out of or in connection with this MTA, whether in contract, tort, misrepresentation, restitution, under statute or otherwise, including but not limited to arising from a breach of, or a failure to perform or defect or delay in performance of, any of a party’s obligations under this MTA, in each case howsoever caused, including if caused by negligence.

Materials: the data as set out in Annex 4 supplied by UK Biobank to the Collaborator under or in connection with this MTA including any Participant Level Data.

MTA: this Material Transfer Agreement, the Collaborator Terms and Conditions (including any documents and/or materials that are referred to in them), the Annexes and where applicable the contents of the Collaborator’s Application Form.

Notice of Dispute: as defined in clause 16.2 of the MTA.

Other Data: as defined in clause 3.1.3 of the MTA.

Participant(s): the individuals who participate in UK Biobank.

Participant Level Data: the personal data as described in Annex 1 contained within the Materials and any applicable generated data (as described in clause 3.1 of the MTA).

Permitted Purpose: to conduct the Approved Research Project in accordance with the approved project scope and the timeframe as set out in the Annex 4, subject to the provisions of this MTA.

Results Data: as defined in clause 3.1.1 of this MTA.

Term: as defined in clause 11.1 of this MTA.

Third Party Processors: as defined in clause 14.5 of this MTA.

UK Addendum: means the International Data Transfer Addendum to the EU Commission Standard Contractual Clauses issued by the UK Information Commissioner under s.119A(1) of the Data Protection Act 2018, of which, in force at present is available at <https://ico.org.uk/media/for-organisations/documents/4019539/international->

New Collaborator MTA – Data Only (2022)

[data-transfer-addendum.pdf](#), or as may be amended or superseded by the UK Information Commissioner from time to time.

VAT: value added tax chargeable under the Value Added Tax Act 1994 (and all amendments and updates thereto) or any similar replacement or additional tax.

Annex 1
Data Processing Description & UK Addendum

This Annex 1 forms part of this MTA. Part A (Data Processing Description) describes the types of Participant Level Data disclosed by UK Biobank to the Collaborator, the Lead Collaborator and Collaborator Researchers to process strictly for the Permitted Purpose described in this MTA (or as otherwise agreed in writing by the parties). Part B (UK Addendum) sets out how the UK Addendum will be deemed to be completed and the additional information required by the UK Addendum.⁴

PART A - Data Processing Description

Data subjects	The Participants
Categories of data	The Participant Level Data to be processed concern the following categories of personal data: - EIDs – the encoded and unique pseudonymised identifiers, which are specific to the Approved Research Project; and - data derived from baseline questionnaire responses and interviews which do not contain special category data, such as birthplace, early life and education, employment history, marital status and number of children.
Special categories of data	The Participant Level Data to be processed concern the following special categories of data: The UK Biobank resource contains health, genetic and biometric data. All special categories of data contained in the Materials is de-identified (the direct and indirect identifiers are removed). The types of special category of data may include: - measures of the Participant’s phenotype, such as height, weight and blood pressure (approximately 2,000 phenotypes per Participant, as further detailed here http://biobank.ndph.ox.ac.uk/showcase/schema.cgi?id=1) - measures of the Participant’s genome, this includes genotype, exome sequence and whole sequence data; - biomarkers created by assay of the Participant’s samples, which include common biomarkers (such as cholesterol), infectious disease markers, proteomic and metabolomic markers; - imaging data (on up to 100,000 Participants) as the result of MRI scans of the head, the heart and the body, plus ultrasound and DEXA; and - data derived from health record linkages including hospital records, primary care records, death and cancer registries or any other sources of clinical data; and - other special category data derived from baseline/online questionnaire responses and interviews, such as past illness / disease history, dietary, cognitive and physical measures.
Purpose of the transfer	The transfer is made to allow the Collaborator to conduct the Permitted Purpose.
Recipients	The Participant Level Data transferred may be disclosed only to the following recipients or categories of recipients: - authorised personnel within the Collaborator, namely the Lead Collaborator and Collaborator Researchers; - Third Party Processors subject to the relevant provisions of the MTA; - Affiliates subject to the relevant provisions of the MTA; - law enforcement agencies acting under Data Protection Legislation; - the relevant data protection authority acting under Data Protection Legislation; and - auditors (UK Biobank or appropriate third parties).
Processing activities	The Participant Level Data will be subject to the following basic processing activities: - access and use of Participant Level Data within the research analysis platform for the Permitted Purpose; - where approved by UK Biobank the transmission to, making available to and storage on the Collaborator's systems/network servers, excluding any WGS (whole genome sequence) or WES (whole exome sequence) files which must not be transmitted or downloaded from the research analysis platform; - research operations, including a Processor Task by a Third Party Processor; and - risk management, compliance, legal and audit functions.
UK Biobank’s lawful basis for sharing personal data	Personal data: Legitimate interests (Article 6(1)(f) UK GDPR) Special categories of data:

⁴ For further information about this MTA’s Data Protection clauses and an explanation of UK Biobank’s position in relation to Data Protection, please see the FAQs on the UK Biobank website (which shall be updated by UK Biobank from time to time).

	Scientific research purpose (Article 9(2)(j) UK GDPR)
Contact details for UK Biobank’s DPO:	UK Biobank DPO DPO@ukbiobank.ac.uk ⁵
Contact details (job title and email address) for the Collaborator’s DPO (or other contact for data protection purposes):	

PART B – UK Addendum

Where clause 9.4 of this MTA applies to the Collaborator, the UK Addendum shall be automatically incorporated into this MTA by reference and deemed to be completed as set out below:

1. in Table 1 of the UK Addendum:
- a) the start date of the UK Addendum shall be the Effective Date of this Agreement;

b) UK Biobank will be the *Exporter* and the Applicant will be the *Importer*; and

c) the parties details and key contacts shall be the details of UK Biobank and the Collaborator as set out in the below.
2. in Table 2 of the UK Addendum the second option (namely *the Approved EU SCCs, including the Appendix Information and with only the following modules, clauses or optional provisions of the Approved EU SCCs brought into effect for the purposes of this Addendum*) will be deemed checked, and:
- a) Module 1 (controller-to-controller) will apply (Modules 2 (controller-to-processor), 3 (processor-to-processor) and 4 (processor-to-controller) will not apply);

b) Optional Clause 7 (Docking Clause) will not apply; and

c) Optional Clause 11 (Option) will not apply.
3. in Table 3 of the UK Addendum:
- a) Annex 1A, List of Parties: will be completed with the information set out in the List of Parties section below;

b) Annex 1B, Description of Transfer: will be completed with the information set out in the Description of Transfer section below; and

c) Annex II: will be completed with the information set out in Annex 2 (Security Measures) of this MTA.
4. in Table 4 of the UK Addendum: the options *Exporter* and *Importer* shall be deemed checked.

The Parties	Exporter	Importer
Parties’ details	Name: UK Biobank Limited Address: Units 1 – 2 Spectrum Way Stockport Cheshire SK3 0SA Company No: 4978912	Name: The Collaborator’s full legal name as identified on page 1 of this MTA. Address: The registered address of the Collaborator.
Key Contact	UK Biobank DPO DPO@ukbiobank.ac.uk	The job title and contact details of the contact at the Collaborator identified above in Part A of this Annex 1.
List of Parties	UK Biobank and the Collaborator as identified above.	
Description of Transfer	The transfer is made to allow the Collaborator to conduct the Permitted Purpose.	

⁵ All queries (about a research project, the Application, the MTA or otherwise) should be sent to the Access Team (access@ukbiobank.ac.uk) in the first instance.

Annex 2
Security Measures

UK Biobank has an obligation under the UK GDPR to ensure that its Materials are stored, retrieved and used securely, with appropriate organisational and technical measures in place. UK Biobank must also take reasonable steps to ensure that Materials it shares continue to be protected with adequate security. This Annex 2 forms part of the MTA and represents a generic level of security standards for data storage, retrieval and usage that the Collaborator must comply with. This Annex 2 may be updated by UK Biobank from time-to-time.

The objective of these security measures is to ensure that Materials provided by UK Biobank are secured and treated as though they are personal data, with appropriate measures in place to restrict access only to authorised users and to protect from unauthorised access by internal and external parties.

1. Information security policy

- 1.1 The Collaborator shall implement and maintain a written information security policy that specifies the technical and organisational measures it shall apply to protect the Materials it processes in accordance with this MTA against unauthorised access and/or unlawful processing. The information security policy shall also describe the measures to be taken in the event of an actual or suspected data security breach.
- 1.2 The Collaborator shall appoint a duly skilled individual with responsibility for ensuring the security of the Materials processed by the Collaborator in its organisation and for reviewing, maintaining and updating the Collaborator’s information security policy.
- 1.3 The Collaborator shall ensure authorised individuals who have access to the Materials are aware of their responsibilities for any data they handle, including appropriate training in order to fulfil their roles.
- 1.4 The information security policy shall also set out that:
 - 1.4.1 information should be stored in an environment suited to its format and sensitivity, to ensure its preservation from physical harm or degradation and its security from unauthorised access;
 - 1.4.2 data storage devices are appropriately protected and access controlled; and
 - 1.4.3 servers, client devices and applications used for storing, accessing and analysing UK Biobank Materials are appropriately maintained with operating systems, firmware, and software within vendor supported versions where exceptions are documented with mitigations described.

2. Access to data

- 2.1 The Collaborator shall implement access controls that restrict access to data it processes to duly authorised individuals and only to the extent necessary for the performance of their duties. Access should be controlled with usernames and appropriately secure passwords, with consideration given to the use of multi-factor authentication methods. Access logging and monitoring should be put in place.
- 2.2 The Collaborator shall ensure that authorised individuals do not share or use the same username, and exceptions must be documented with adequate mitigations described and auditable.
- 2.3 The Collaborator shall identify and appoint a duly skilled administrator with responsibility for granting, changing or voiding data access privileges; access privileges should be periodically reviewed.
- 2.4 Where an individual who has access to the Materials leaves or has their authorisation removed (e.g. as a result of a change of role) the Lead Collaborator shall ensure that their status is updated within 24 hours.

3. Storage and transmission of data

- 3.1 Where practicable data should be encrypted at rest and during transmission using strong encryption techniques; best practices should be followed for key management.
- 3.2 Use of portable media should be avoided unless reasonably required to process the data. Where needed, data must be encrypted using a strong password or other secret information.
- 3.3 Any deletion of data should be permanent and deleted data should not be recoverable.
- 3.4 An information asset register should be maintained so that all UKB data can be removed on request or at the end of the agreement.

Annex 3
Annual Confirmation Form Template

The purpose of this Annex 3 is to provide the Lead Collaborator with a template of the Annual Confirmation Form that will need to be completed and submitted to UK Biobank on an annual basis (the annual anniversary of the Effective Date). For the avoidance of doubt, the Lead Collaborator is not required to complete this form on execution of the MTA.

UK Biobank reserves the right to update this form from time to time including the manner in which it is submitted. Up-to-date versions of the form and instructions for submission are accessible on UK Biobank’s AMS and website.

Collaborator Annual Confirmation Form

Every year, the Lead Collaborator at each Collaborator Institution for a UK Biobank Research Project is required to provide some information regarding their project and confirmation that they are complying with the terms of the Material Transfer Agreement (MTA). For help, please see our AMS User Guide on the UK Biobank website. Failure to provide this form on time (following reminders from UK Biobank before the deadline) will result in the Collaborator Institution being prevented from downloading further data and/or accessing existing data via the RAP. The ability to download further data and/or access existing data via the RAP will be restored when the report is submitted.

Research Project Number:	
Collaborator Institution:	
Date form completed:	

1. Please provide the names of any Affiliates⁶ who have access to UK Biobank data for this Research Project. If none, please say so:

Affiliates:

2. Please provide the names of any Third Party Processors who process UK Biobank data as a sub-contractor for this Research Project and provide details of the tasks the Third Party Processor conducts on your behalf. If none, please say so:

Third Party Processors:
Third Party Processor tasks:

3. I confirm that:

Please mark with an ‘x’:

- I am the Lead Collaborator at the Collaborator Institution and of the Research Project identified above;

☐
- The research conducted by the Collaborator Institution is within the parameters of the Research Project’s approved scope and the progress of the research is consistent with the Applicant PI’s project update; and

☐
- The provisions of the relevant Material Transfer Agreement(s) (including any applicable amendments and updates) and the Annexes are being complied with.

☐

⁶ An Affiliate means any company or other entity that is directly or indirectly Controlling, Controlled by or under common Control with a Collaborator (which includes if such Collaborator is a company, a subsidiary or parent or holding company of such Collaborator, or a subsidiary of such parent or holding company) for so long as such Control exists. Please see the definition of ‘Control’ in the MTA for further information.

Annex 4

Approved Research Project

Approved Application Reference Number: 69098

Approved Application Name: The Relationship Between Normal Blood Pressure Values, Serum Uric Acid and Cardiovascular and Metabolic Phenotypes.

Details of the Approved Research Project (including the Project Scope, Timeframe, Materials (together with any specific conditions), Access Charges and Collaborators can be accessed here:

[Approved project details](#)

Change Requests

The following requests can be made via the UK Biobank Access Management System (AMS) and shall be subject to review and approval (and where applicable, additional Access Charges):

- Requests to extend the Project Scope
- Requests to extend the project duration
- Requests to add additional data to the Approved Research Project

UK Biobank will also facilitate the following changes to the Approved Research Project where this is required by the Applicant:

- Add additional Collaborators to the Approved Research Project (subject to the applicable Access Charge)
- Changes to the Applicant PI of the Approved Research Project

Contratto di trasferimento di materiale - Collaboratore

Cara professoressa Di Marco

Istituzione collaboratrice: Università degli Studi dell'Aquila

Numero di riferimento della domanda: 69098

UK Biobank Limited ("**UK Biobank**") è lieta di approvare la richiesta di utilizzo della risorsa UK Biobank. L'approvazione di questa richiesta da parte di UK Biobank è valida per 90 giorni, durante i quali l'istituzione collaboratrice ("**Collaboratore**") deve sottoscrivere il presente Accordo di trasferimento di materiale ("**MTA**") e il Richiedente deve pagare le spese di accesso. Queste sono le fasi finali prima che l'accesso venga concesso. Se questi passaggi non vengono eseguiti entro 90 giorni, UK Biobank si riserva il diritto di revocare l'approvazione all'utilizzo della risorsa UK Biobank da parte del collaboratore.

Parti

Si tratta di un accordo tra UK Biobank e il Collaboratore (ognuno sarà riferito come "**parte**", insieme le "**parti**"). Il Collaboratore principale non è una parte dell'MTA, tuttavia UK Biobank richiede che il Collaboratore principale firmi l'MTA per riconoscere che le disposizioni del presente MTA sono state "lette e comprese" in modo da essere pienamente consapevoli degli obblighi del Collaboratore sia nei confronti di UK Biobank che dei Partecipanti di UK Biobank. Il Collaboratore sarà responsabile solo della condotta del Collaboratore principale e di tutti i Ricercatori collaboratori coinvolti in questo progetto.

Progetto di ricerca approvato. A scanso di equivoci, il Collaboratore non sarà responsabile degli obblighi o della condotta (a) dell'Applicant, del Principal Investigator dell'Applicant o dei Ricercatori dell'Applicant o (b) dei Collaboratori terzi, del leader dei collaboratori terzi o dei Ricercatori dei collaboratori terzi.

Nel caso in cui il relativo MTA con l'applicant venga terminato (per qualsiasi motivo), UK Biobank avrà il diritto di terminare immediatamente il presente MTA, previa comunicazione scritta al Collaboratore.

Struttura dell'accordo

Il presente MTA entrerà in vigore alla "Data di entrata in vigore". Se si è concordato una versione precedente dell'MTA per questa Applicazione/Progetto di ricerca approvato, la versione precedente terminerà automaticamente alla "Data di entrata in vigore" e sarà sostituita dal presente MTA.

Il presente MTA è subordinato al ricevimento da parte di UK Biobank, entro trenta (30) giorni dalla "Data di entrata in vigore", di fondi liquidati a copertura delle Spese di accesso e di qualsiasi IVA applicabile.

Termini standard e allegati

Il contenuto dell'MTA standard della UK Biobank e le condizioni in esso contenute non sono negoziabili.

Il presente MTA incorpora i Termini e le Condizioni del Collaboratore allegati (compresi i documenti e/o i materiali in essi richiamati), il contenuto del Modulo di richiesta (ove applicabile) e gli "Annex" allegati:

- Allegato 1 (Descrizione del trattamento dei dati e addendum per il Regno Unito);
- Allegato 2 (Misure di sicurezza);
- Allegato 3 (Modello di modulo di conferma annuale del collaboratore); e
- Allegato 4 (Progetto di ricerca approvato - che riassume i materiali che saranno messi a disposizione del Collaboratore).

Le definizioni utilizzate in questo MTA sono riportate alle pagine 15-17.

Cordiali saluti

A nome e per conto della UK Biobank

Jonathan Sellors

General Counsel & Company Secretary

1. Fornitura di materiali da parte della UK Biobank

1.1 La UK Biobank si impegna a fornire i Materiali al Collaboratore nei tempi e nei modi stabiliti nel presente MTA, nel rispetto delle disposizioni del presente MTA.

1.2 UK Biobank garantisce al Collaboratore che, ai fini del presente MTA:

1.2.1 ha il diritto di fornire i Materiali al Collaboratore;

1.2.2 il consenso a partecipare alla UK Biobank è stato ottenuto dai partecipanti e, inoltre, il consenso ai sensi dello Human Tissue Act 2004 è stato ottenuto dai partecipanti interessati; e

1.2.3 l'uso dei materiali per il progetto di ricerca approvato rientra nell'approvazione generica della Research Tissue Bank (RTB) di UK Biobank da parte del NHS North West REC, disponibile [qui](#).

1.3 Il Collaboratore concorda che i Materiali sono forniti "così come sono" senza alcuna garanzia di qualità soddisfacente o di idoneità per un particolare scopo o uso, o che l'uso dei Materiali non violerà i diritti di terzi. Ad eccezione di quanto espressamente indicato nel presente MTA, tutte le garanzie, i termini e le condizioni, sia espresse che implicite per legge, diritto comune o altro, sono escluse nella misura massima consentita dalla legge.

2. Utilizzo dei materiali da parte del collaboratore

2.1 Il Collaboratore si impegna a utilizzare i Materiali solo

2.1.1 in conformità con i termini e le condizioni del presente MTA;

2.1.2 per condurre il Progetto di Ricerca Approvato solo per lo Scopo Consentito; e

2.1.3 dall'Istituto Collaboratore e a livello individuale all'interno del Collaboratore, dal Collaboratore principale, dai Ricercatori Collaboratori e da Affiliati e da persone di terze parti (nominati dal Collaboratore).

2.2 Il Collaboratore non potrà condividere, sub-licenziare, divulgare, trasferire, vendere, regalare o fornire i Materiali ad altre persone o a terzi non autorizzati.

2.3 Fatte salve le altre disposizioni del presente MTA, qualsiasi violazione effettiva o anticipata di una qualsiasi disposizione della clausola 2.1 o 2.2 autorizzerà UK Biobank a rescindere il presente accordo con effetto immediato e a richiedere l'immediata restituzione o distruzione di qualsiasi materiale fornito da UK Biobank.

2.4 Il Collaboratore deve e dovrà fare in modo che il Collaboratore principale, i Ricercatori collaboratori e qualsiasi Affiliato e qualsiasi Terzo Responsabile siano messi a conoscenza e rispettino i termini e le condizioni del presente MTA e la legislazione sulla protezione dei dati. Qualsiasi atto o omissione del Collaboratore leader o di qualsiasi Ricercatore Collaboratore o di qualsiasi Affiliato o persone di terze parti nominate sarà considerato un atto del relativo Collaboratore per il quale il relativo Collaboratore è pienamente responsabile.

2.5 Il presente MTA conferisce al Collaboratore solo i diritti che gli sono espressamente concessi. A scanso di equivoci, nulla di quanto contenuto nel presente MTA impedirà alla UK Biobank di fornire gli stessi materiali (o altri dati e/o campioni presenti nella risorsa UK Biobank) a terzi, in linea con le procedure di accesso (disponibili sul sito web della UK Biobank, [ed](#) eventualmente aggiornati dalla UK Biobank di volta in volta) o per altri scopi operativi della UK Biobank.

2.6 In relazione ai Materiali forniti al Collaboratore:

2.6.1 UK Biobank è il proprietario dei Materiali e UK Biobank è il proprietario dei Diritti di Proprietà Intellettuale dei Materiali; e

2.6.2 Con la presente UK Biobank concede al Collaboratore una licenza revocabile, mondiale, esente da royalty, non esclusiva e non trasferibile (ma senza alcun diritto di proprietà) durante il Periodo di validità per l'utilizzo dei Materiali per lo Scopo consentito, in base ai termini e alle condizioni del presente MTA.

3. Generazione di dati da parte del collaboratore

Generazione di dati da parte o per conto del Collaboratore durante il Progetto di Ricerca Approvato

3.1 I dati generati dal Collaboratore nell'esecuzione del Progetto di Ricerca Approvato saranno considerati come rientranti nelle seguenti categorie:

3.1.1 **Dati sui risultati:** dati e metodologia (per esempio, gli script SAS/R/Stata) che sottostanno i *risultati* e che consentirebbero a un altro ricercatore competente di generare i *risultati*;

3.1.2 **Risultati:** i *risultati* generati dal Collaboratore come risultato del Progetto di Ricerca Approvato; e/

3.1.3 **Altri dati**: tutti gli altri dati generati dal Collaboratore che non rientrano in una delle due categorie precedenti.

Proprietà dei dati generati

3.2 Ad eccezione di quanto previsto nella clausola 3.3, il Collaboratore è proprietario dei DPI dei propri *risultati*, dei *Dati sui risultati* e degli *altri dati*. Con il presente documento, il Collaboratore concede a UK Biobank una licenza non esclusiva, perpetua, irrevocabile, mondiale, interamente pagata, esente da royalty e completamente sub-licenziabile, per l'utilizzo, la riproduzione, la distribuzione, la pubblicazione, l'archiviazione e la diffusione in altro modo dei *risultati*, dei *dati sui risultati* e degli *altri dati*.

3.3 Nulla di quanto contenuto nel presente MTA può servire ad assegnare al Collaboratore i diritti di proprietà intellettuale dei materiali. Nella misura in cui i *risultati*, i *dati sui risultati* o gli *altri dati* incorporano qualsiasi materiale, i diritti di proprietà intellettuale di tali materiali rimarranno di proprietà di UK Biobank e non apparterranno al Collaboratore.

3.4 Il collaboratore conferma a UK Biobank che la ricezione e l'utilizzo da parte di UK Biobank dei *dati sui risultati* e sulle scoperte del collaboratore non violano i diritti, compresi i DPI esistenti, di terzi. Tale conferma deve essere:

3.4.1 considerato preso al momento, rispettivamente, della pubblicazione dei *risultati* o della restituzione dei *dati sui risultati* a UK Biobank; e

3.4.2 sulla base delle migliori conoscenze e convinzioni del Collaboratore, dopo aver effettuato indagini ragionevoli e diligenti (ma l'estensione di tale obbligo non include alcun requisito per il Collaboratore di effettuare ricerche esterne sui brevetti).

Diritti sulle invenzioni/sviluppi realizzati dal Collaboratore

3.5 Fatta salva la restrizione di cui alla clausola 3.7, UK Biobank conferma che non avrà alcun diritto o licenza sui DPI in relazione a qualsiasi invenzione realizzata dal Collaboratore in seguito all'utilizzo dei materiali, dei *dati sui risultati*, dei reperti o di *altri dati* ("**invenzioni generate dal Collaboratore**").

3.6 Tuttavia, il Collaboratore riconosce che la risorsa UK Biobank è stata (a) prodotta utilizzando una combinazione della buona volontà e del contributo di 500.000 partecipanti del Regno Unito (b) finanziamenti pubblici e di beneficenza (in particolare da parte di Wellcome e del Medical Research Council) (c) l'uso di risorse pubbliche (come i dati dei registri sanitari del Regno Unito) e (d) istituita con l'obiettivo esplicito di promuovere la conduzione di ricerche sulla salute che sono di interesse pubblico. UK Biobank riconosce inoltre il contributo che il Collaboratore sta apportando alla valorizzazione della risorsa (sotto forma di generazione e disponibilità per altri ricercatori, tra l'altro, dei dati relativi ai risultati del progetto di ricerca approvato).

3.7 In termini di obblighi specifici, tenuto conto di quanto riconosciuto nella precedente clausola 3.6, il Collaboratore concorda (e questa clausola è una disposizione materiale del presente MTA) che non dovrà e non dovrà tentare di:

3.7.1 depositare qualsiasi brevetto con rivendicazioni dirette a; o

3.7.2 cercare in altro modo di rivendicare o far valere qualsiasi DPI in;

i dati genotipo-fenotipo all'interno dei Materiali o nei dati genotipo-fenotipo che sono stati generati dal (o per conto del) Collaboratore nel corso del Progetto di Ricerca Approvato (sia che tali dati genotipo-fenotipo siano sotto forma di *Dati sui Risultati*, *Risultati* o *Altri Dati*). Senza limitare quanto sopra, le parti concordano che la presente clausola 3.7 non proibisce al Collaboratore di brevettare o far valere i diritti di proprietà intellettuale su farmaci, terapie, diagnostici, altre tecnologie o metodi di trattamento, a condizione che ciò non limiti la capacità di UK Biobank di consentire ai ricercatori approvati di utilizzare i dati generati dal Collaboratore (come definito nella clausola 3.1), compresi i dati sui biomarcatori identificati dal Collaboratore, attraverso l'uso della risorsa UK Biobank.

3.8 UK Biobank esclude espressamente (direttamente o indirettamente) (i) qualsiasi diritto del Collaboratore di concedere in sublicenza qualsiasi diritto concesso al Collaboratore sui Materiali ai sensi del presente MTA e/o (ii) qualsiasi diritto del Collaboratore di pubblicare o distribuire qualsiasi Materiale, se non al solo scopo di includere una quantità commisurata di dati di supporto (che non includerà alcun dato a livello di partecipante) nella pubblicazione dei risultati da parte del Collaboratore (che può includere la pubblicazione commisurata di alcuni dati sui risultati, come ragionevolmente richiesto dall'editore competente).

3.9 A scanso di equivoci, i diritti concessi al Collaboratore ai sensi del presente MTA di utilizzare i Materiali sono solo per lo Scopo Consentito.

4. Conferme da parte del collaboratore

Generale

4.1 Il Collaboratore con la presente conferma a UK Biobank che tutto il lavoro svolto utilizzando i Materiali sarà eseguito in conformità con tutte le leggi, i regolamenti, le linee guida e le approvazioni applicabili, tra cui, a titolo esemplificativo e non esaustivo, la Human Tissue Act 2004, la legislazione sulla protezione dei dati e qualsiasi approvazione richiesta da un Comitato etico per la ricerca (o l'equivalente applicabile nella giurisdizione in cui deve essere condotto il Progetto di ricerca approvato).

Sicurezza

4.2 Il Collaboratore dovrà conservare i Materiali in un sistema di rete sicuro, secondo gli standard ragionevolmente previsti per la conservazione di dati sensibili/confidenziali di valore e di proprietà. Inoltre, il Collaboratore è tenuto a implementare le misure tecniche e organizzative appropriate, come indicato nell'Allegato 2 (Misure di sicurezza), per proteggere i Materiali dalla distruzione accidentale o illegale, dalla perdita, dall'alterazione, dalla divulgazione non autorizzata o dall'accesso ai Materiali (un "**Incidente di sicurezza dei dati**"). Con la firma del presente MTA, il Collaboratore leader conferma che le Misure di Sicurezza di cui all'Allegato 2 sono in atto per proteggere i Materiali.

4.3 Il Collaboratore dovrà notificare a UK Biobank senza indebito ritardo (e in ogni caso non oltre le 24 ore) dopo essere venuto a conoscenza di un ragionevolmente sospetto ("near miss") o di un effettivo incidente di sicurezza dei dati che riguarda i materiali. Tale notifica deve essere inviata via e-mail all'indirizzo DPO@ukbiobank.ac.uk con copia all'indirizzo access@ukbiobank.ac.uk.

4.3.1 Il Collaboratore non dovrà ritardare tale notifica sulla base del fatto che le informazioni sono incomplete o l'indagine pertinente è in corso. Inoltre, il Collaboratore non dovrà fare alcun annuncio esterno, né alcuna notifica a un'autorità di vigilanza o a un'autorità di regolamentazione in merito a tali incidenti di sicurezza dei dati senza l'esplicito consenso scritto di UK Biobank, a meno che non sia richiesto dalla legge.

4.3.2 Entrambe le parti collaboreranno e si forniranno ragionevole assistenza reciproca per facilitare la gestione dell'incidente di sicurezza dei dati.

Ritiro del consenso da parte dei partecipanti

4.4 Il Collaboratore conferma che si occuperà prontamente e in modo appropriato (in conformità con l'opzione di recesso dei Partecipanti, come indicato sul sito web di UK Biobank [qui](#)) di qualsiasi recesso "senza ulteriore utilizzo" da parte dei Partecipanti che UK Biobank notifichi al Collaboratore.

Identificazione dei partecipanti

4.5 Al Collaboratore è fatto espresso divieto di (o di tentare di):

4.5.1 sviluppare, collegare o reingegnerizzare i Materiali ad esso forniti in modo da identificare (direttamente o indirettamente) qualsiasi Partecipante;

4.5.2 identificare qualsiasi Partecipante dai materiali forniti da UK Biobank; o

4.5.3 contattare qualsiasi Partecipante.

4.6 Nel caso in cui il Collaboratore identifichi inavvertitamente un Partecipante, dovrà notificare immediatamente a UK Biobank le circostanze in cui ciò è avvenuto (in modo ragionevolmente dettagliato). Tale notifica deve essere inviata per e-mail a DPO@ukbiobank.ac.uk con copia a access@ukbiobank.ac.uk.

4.7 Oltre che ai fini della clausola 4.6, il Collaboratore non dovrà:

4.7.1 condividere l'identificazione di tale partecipante con qualsiasi altra persona; o

4.7.2 tentare di contattare il Partecipante stesso.

4.8 Fatte salve le altre disposizioni del presente MTA, qualsiasi violazione effettiva o anticipata di qualsiasi disposizione delle clausole 4.1, 4.2 e da 4.4 a 4.7 comprese, darà diritto a UK Biobank di rescindere il presente Contratto con effetto immediato e di richiedere l'immediata restituzione o distruzione di qualsiasi materiale fornito da UK Biobank.

5. Pubblicazione della sintesi divulgativa (lay summary) e della restituzione e pubblicazione dei risultati.

Pubblicazione della sintesi sul sito web della UK Biobank

5.1 Dopo che il Collaboratore ha ricevuto i materiali per il progetto di ricerca approvato, UK Biobank ha il diritto di pubblicare sul proprio sito web:

5.1.1 la sintesi divulgativa del progetto di ricerca approvato contenuta nella domanda (ad eccezione del materiale che UK Biobank ha deciso di mantenere riservato); e

5.1.2 dati sintetici del Collaboratore.

Aggiornamenti del progetto

5.2 Di tanto in tanto, durante il periodo di validità, UK Biobank avrà il diritto di chiedere al Collaboratore principale di fornire a UK Biobank aggiornamenti ragionevolmente dettagliati sullo stato di avanzamento del progetto di ricerca approvato, che includeranno le scoperte effettuate dal Collaboratore che, a suo ragionevole parere, possono essere:

(a) pubblicato o in attesa di pubblicazione;

(b) divulgato in un brevetto pubblicato; o

(c) altrimenti significativi (nel contesto della ricerca medica); e

5.2.1 una sintesi (e una copia della domanda, se richiesta) di tutti i brevetti le cui rivendicazioni coprono, o sono destinate a coprire, un'invenzione Generata dal Collaboratore entro due (2) mesi dalla loro pubblicazione.

5.3 In relazione agli aggiornamenti del progetto forniti dal Leader del Collaboratore come indicato nella clausola 5.2 di cui sopra:

5.3.1 UK Biobank avrà la possibilità di rendere pubblica una sintesi degli aggiornamenti del progetto, a condizione che il Collaboratore (di cui alla clausola 5.5) mantenga un ragionevole periodo di riservatezza sugli elementi per i quali i diritti di brevetto devono ancora essere depositati; e

5.3.2 UK Biobank avrà la possibilità di porre al Collaboratore qualsiasi domanda ragionevole derivante dagli aggiornamenti del progetto e il Collaboratore risponderà a tali domande in modo tempestivo.

Pubblicazione dei risultati

5.4 Il Collaboratore farà tutto il possibile per pubblicare i risultati (e fornire a UK Biobank un link) entro sei (6) mesi dalla data di completamento del progetto di ricerca approvato:

5.4.1 in una rivista accademica; o

5.4.2 su un sito di pubblicazione open-source.

5.5 La UK Biobank riconosce e accetta che il Collaboratore possa mantenere tali risultati riservati per un periodo di tempo ragionevole, in conformità con le sue ragionevoli pratiche di ricerca e sviluppo. A scanso di equivoci, il Collaboratore ha il diritto di mantenere la riservatezza su qualsiasi Reperto per il quale è stata richiesta la tutela brevettuale (e il brevetto non è ancora stato pubblicato).

5.6 Se tali *risultati* sono resi pubblici, UK Biobank richiede che i *Dati sui Risultati* sottostanti tali *risultati* siano prontamente restituiti o altrimenti resi disponibili a UK Biobank¹. UK Biobank richiede inoltre che i *dati sui risultati* siano restituiti in un formato adeguato e comprensibile (in particolare per altri ricercatori) insieme a qualsiasi documentazione ragionevolmente necessaria per consentire a un altro ricercatore di interpretare e comprendere i dati dei risultati.

¹ A scanso di equivoci, l'intenzione di questa disposizione non è quella di richiedere la restituzione di data set irrilevanti o estranei, ma piuttosto di rendere disponibili ad altri ricercatori informazioni sintetiche (in una forma paragonabile a quella spesso richiesta dalle riviste accademiche), in particolare in modo che non sia necessario per un ricercatore (che esamina i risultati) dover ricreare alcune variabili derivate o metriche correlate. Inoltre, per chiarezza, i Collaboratori non avranno alcun obbligo di fornire a UK Biobank o pubblicare, e non concedono a UK Biobank alcun diritto su o per, qualsiasi dato genotipo-

5.7 Entro sei (6) mesi dalla pubblicazione dei *risultati*, il collaboratore in questione fornirà a UK Biobank i *dati sui risultati* nella forma e nel formato indicati nella clausola 5.6 di cui sopra (in alternativa, UK Biobank e il collaboratore in questione possono concordare che il collaboratore in questione conservi i dati sui risultati sulla base del fatto che essi siano resi pubblicamente disponibili ad altri ricercatori e/o disponibili al pubblico in generale).

5.8 UK Biobank prenderà ragionevolmente in considerazione qualsiasi richiesta scritta (contenente una spiegazione adeguata) di proroga dei termini stabiliti in questa clausola.

5.9 Il Collaboratore deve fare tutto il possibile per pubblicare un livello adeguato di *risultati* in relazione al progetto di ricerca approvato entro i primi tre (3) anni del periodo di validità (e in ogni successiva estensione). Qualora ciò non sia possibile, il Collaboratore dovrà fornire a UK Biobank una spiegazione ragionevole del motivo per cui ciò non è possibile e una stima di quando ci si può aspettare una pubblicazione.

Notifica alla UK Biobank

5.10 Se non diversamente indicato nell'Allegato 4, il Collaboratore non è tenuto a ottenere l'approvazione di UK Biobank per qualsiasi relazione sui propri *risultati*. Il Collaboratore deve tuttavia fornire una copia di qualsiasi relazione sui suoi *risultati* e di qualsiasi comunicato stampa a UK Biobank almeno due (2) settimane prima della data prevista per la prima presentazione pubblica o pubblicazione in qualsiasi formato (ad esempio, rivista cartacea, relazione on-line, abstract di riunione). Il Collaboratore dovrà caricare tali documenti su AMS in prima istanza. Se ciò non fosse possibile, il Collaboratore dovrà inviare tali documenti via e-mail a access@ukbiobank.ac.uk.

5.11 Tuttavia, e nonostante le disposizioni della clausola 5.10 di cui sopra, il Collaboratore è tenuto a informare prontamente e in anticipo (per iscritto) la UK Biobank nel caso in cui una relazione sui suoi *risultati* sia ragionevolmente suscettibile di provocare controversie o di attirare in altro modo un'attenzione pubblica significativa. In tali circostanze, l'UK Biobank si riserva il diritto di formulare le raccomandazioni, le riserve o i suggerimenti sulla relazione che ritiene opportuni (e che può rendere pubblici) affinché siano presi in considerazione dal Collaboratore.

Credit a UK Biobank

5.12 La UK Biobank richiede che il termine "UK Biobank" sia incorporato nel titolo e/o nell'abstract di tutte le pubblicazioni.

5.13 La UK Biobank richiede che tutte le pubblicazioni di risultati che utilizzano i dati della UK Biobank includano il seguente credit, che deve essere incorporato negli "Acknowledgements" di tale pubblicazione:

" This research has been conducted using the UK Biobank Resource under application number []. "

5.14 Il riconoscimento della UK Biobank dovrebbe, quando possibile, essere collegato agli strumenti di ricerca di riferimento (come PubMed e MEDLINE e/o il riferimento DOI).

6. Spese

6.1 Le spese di accesso (e l'IVA applicabile) per il progetto di ricerca approvato sono dovute dal Richiedente. Inoltre, le spese di accesso (e l'IVA applicabile) dovute per l'aggiunta del collaboratore al progetto di ricerca approvato sono anch'esse dovute dal (o per conto del) Richiedente e dovranno essere pagate a UK Biobank entro e non oltre trenta (30) giorni dalla data di entrata in vigore.

6.2 I diritti concessi al Collaboratore da UK Biobank ai sensi del presente MTA sono subordinati al pagamento delle spese di accesso (e dell'IVA applicabile) e pertanto, a scanso di equivoci, nessun Materiale sarà fornito al Collaboratore fino a quando o a meno che le spese di accesso (e l'IVA applicabile) non siano state ricevute per intero.

6.3 Se il pagamento delle spese di accesso non è stato effettuato entro novanta (90) giorni dal ricevimento del presente MTA da parte del collaboratore, UK Biobank si riserva il diritto di revocare l'approvazione al collaboratore per l'accesso alle risorse e ai materiali di UK Biobank.

7. Conferma e revisione annuale

7.1 Durante il periodo di validità, UK Biobank richiede al collaboratore principale di confermare annualmente che il progetto di ricerca approvato rimane conforme alle disposizioni dell'MTA (e degli allegati). In particolare, il collaboratore principale fornirà a UK Biobank tale conferma nell'ambito del modulo di conferma annuale nel formato Allegato 3.

7.2 Nel caso in cui il modulo di conferma annuale non venga ricevuto da UK Biobank nei tempi, nei modi e nella forma previsti, i diritti del Collaboratore ai sensi del presente MTA saranno sospesi e il Collaboratore non sarà in grado di scaricare ulteriori dati (in termini di nuovi campi di dati o di aggiornamenti dei campi di dati esistenti) o di accedere ai dati esistenti tramite la piattaforma di accesso alla ricerca fino a quando il modulo di conferma annuale non sarà stato debitamente e correttamente fornito. Se il modulo di conferma annuale è ancora in sospeso, nonostante i solleciti da parte di UK Biobank, 3 mesi

dopo il relativo anniversario della Data di entrata in vigore, UK Biobank ha il diritto di rescindere il presente MTA inviando al Collaboratore una notifica scritta di rescissione e/o di impedire all'istituto collaboratore (o al collaboratore principale) di richiedere o accedere a ulteriori materiali da UK Biobank.

7.3 In circostanze in cui la UK Biobank ritenga ragionevolmente che si sia verificato un incidente di sicurezza dei dati o un altro incidente grave, allora, su avviso del collaboratore, al fine di confermare o indagare sulla conformità alle disposizioni del presente MTA, la UK Biobank può, direttamente o tramite terzi appropriati:

7.3.1 scegliere di intraprendere un audit (di persona o a distanza) al fine di rivedere la sicurezza, l'archiviazione o altre disposizioni per i Materiali; e

7.3.2 richiedere ulteriori informazioni sul progetto di ricerca approvato e/o sul suo svolgimento, come UK Biobank può, di volta in volta, ragionevolmente richiedere.

7.4 UK Biobank sosterrà i costi di tali revisioni, a meno che non venga scoperta un'inadempienza materiale nelle procedure e nei processi del collaboratore in questione, nel qual caso il collaboratore in questione sarà obbligato a rimborsare i costi ragionevoli di UK Biobank e di eventuali terzi interessati.

7.5 UK Biobank conferma che i suoi diritti di audit saranno esercitati non più di una volta all'anno e con un ragionevole preavviso (che può essere immediato nel caso di un incidente di sicurezza dei dati o di un altro incidente grave) al collaboratore. Per quanto praticamente possibile, l'UK Biobank accetta di coordinare qualsiasi visita e audit in loco con le altre parti interessate.

8. La riservatezza

8.1 Fatte salve le eccezioni di cui alla clausola 8.2, UK Biobank manterrà riservate tutte le informazioni comunicate per iscritto dal Collaboratore e contrassegnate come riservate ("**informazioni riservate del Collaboratore**") e non divulgherà tali informazioni a nessuno.

8.2 UK Biobank può divulgare le informazioni riservate del collaboratore se espressamente consentito dal presente MTA o quando:

8.2.1 è richiesto di essere divulgato per legge, da qualsiasi autorità governativa o di regolamentazione, da un tribunale o altra autorità di giurisdizione competente; o

8.2.2 può essere dimostrato da UK Biobank (con ragionevole soddisfazione del collaboratore) che UK Biobank ne era a conoscenza prima della divulgazione da parte del collaboratore; oppure

8.2.3 è stato legittimamente divulgato a UK Biobank da una terza parte che non ha imposto alcuna restrizione alla sua divulgazione; oppure

8.2.4 le informazioni erano (o sono diventate) di dominio pubblico se non a causa di una violazione di questa clausola da parte di UK Biobank; oppure

8.2.5 UK Biobank e il Collaboratore concordano, agendo ragionevolmente, che tali informazioni sono banali o ovvie, oppure concordano per iscritto che tale divulgazione può essere consentita.

9. Protezione dei dati

*Rapporto tra le parti*²

²La presente clausola 9 affronta i requisiti della legislazione prevalente in materia di protezione dei dati nel Regno Unito: principalmente il Data Protection Act 2018 (<https://www.legislation.gov.uk/ukpga/2018/12/contents>) e il GDPR del Regno Unito e le relative linee guida delle autorità di regolamentazione competenti, in particolare l'ICO (<https://ico.org.uk/>). Questa clausola affronta anche l'impatto, dal punto di vista di UK Biobank, dell'uscita del Regno Unito dall'Unione Europea. In relazione ai dati identificabili, due fattori rimangono invariati rispetto all'MTA originale:

· La UK Biobank ha fatto e continuerà a fare di tutto per anonimizzare i dati che rilascia ai ricercatori, rimuovendo gli identificatori diretti e indiretti, in modo tale che (anche tenendo conto delle informazioni pubblicamente disponibili) non dovrebbe essere possibile per un ricercatore ri-identificare un partecipante; · inoltre, al Collaboratore è espressamente vietato di ri-identificare effettivamente (e di fare qualsiasi tentativo di ri-identificazione) qualsiasi partecipante in conformità con la clausola 4.5 dell'MTA.

Ciononostante, la UK Biobank ritiene opportuno richiedere ai ricercatori di trattare i dati della UK Biobank come se fossero dati personali, il che richiede che il Collaboratore accetti le disposizioni della presente clausola. Il Collaboratore sarà considerato un responsabile del trattamento dei dati separato e indipendente (e non un incaricato del trattamento dei dati) ai sensi della legislazione sulla protezione dei dati. Si prega di consultare le FAQ sul sito web di UK Biobank (che saranno aggiornate da UK Biobank di volta in volta).

9.1 Le parti riconoscono che UK Biobank e il Collaboratore sono controllori indipendenti per quanto riguarda i dati di livello del partecipante trattati in conformità al presente MTA e che il Collaboratore tratterà i dati di livello del partecipante esclusivamente per lo scopo consentito. In nessun caso le parti tratteranno i dati a livello di partecipante come controllori congiunti.

9.2 Ciascuna parte sarà individualmente e separatamente responsabile del rispetto degli obblighi che le competono in qualità di responsabile del trattamento ai sensi della legislazione sulla protezione dei dati³.

Cooperazione

9.3 Nel caso in cui il Collaboratore, il Collaboratore principale o qualsiasi Ricercatore Collaboratore riceva una corrispondenza, una richiesta o un reclamo da parte di un Partecipante, di un'autorità di regolamentazione o di un'altra terza parte ("**Corrispondenza**") in relazione al trattamento dei Dati a livello di Partecipante, dovrà informare prontamente UK Biobank fornendo tutti i dettagli della stessa. In ogni caso, il Collaboratore, il Collaboratore principale o qualsiasi ricercatore collaboratore dovrà: (i) ottenere l'approvazione scritta di UK Biobank prima di rispondere alla corrispondenza, compresa l'approvazione del contenuto di qualsiasi risposta; e (ii) nel rispetto della legislazione sulla protezione dei dati, consentire a UK Biobank di rispondere direttamente alla corrispondenza.

Se il collaboratore si trova al di fuori del Regno Unito

9.4 Qualora UK Biobank trasferisca i *Dati a Livello di Partecipante* a un collaboratore al di fuori del Regno Unito, in un territorio che non è stato specificato come in grado di garantire un livello adeguato di protezione in conformità alla legislazione sulla protezione dei dati, le parti concordano che l'addendum del Regno Unito sarà automaticamente incorporato nel presente MTA come riferimento e sarà considerato completato come indicato nella parte B dell'Allegato 1 del presente MTA.

9.5 In caso di conflitto tra l'MTA e l'Addendum per il Regno Unito, prevarrà l'Addendum per il Regno

Unito. Trasferimenti internazionali da parte del Collaboratore

9.6 Il Collaboratore non tratterà alcun dato del livello del partecipante (né consentirà il trattamento di alcun dato del livello del partecipante) in un territorio al di fuori del Regno Unito (o, qualora si applichi la clausola 9.4, nel caso in cui il trattamento avvenga in un territorio successivo) a meno che non abbia adottato le misure necessarie per garantire che il trasferimento sia conforme alla legislazione sulla protezione dei dati.

10. Limitazione di responsabilità

10.1 Le parti convengono che:

10.1.1 fatte salve le clausole 10.2, 10.3 e 10.4, la responsabilità massima aggregata (ossia, importo complessivo massimo dell'indennizzo dovuto) di UK Biobank ai sensi del presente MTA e/o in relazione al progetto di ricerca approvato sarà limitata alle spese di accesso pagate o pagabili dal collaboratore a UK Biobank (fatturate o meno al collaboratore) in relazione al progetto di ricerca approvato; e

10.1.2 fatte salve le clausole 10.2, 10.3 e 10.5, la responsabilità massima aggregata (ossia, importo complessivo massimo dell'indennizzo dovuto) del Collaboratore ai sensi del presente MTA e/o in relazione al progetto di ricerca approvato sarà limitata alle spese di accesso pagate o pagabili dal Collaboratore a UK Biobank (fatturate o meno al Collaboratore) in relazione al progetto di ricerca approvato.

10.2 Nonostante la clausola 10.1 di cui sopra, UK Biobank non avrà alcuna responsabilità nei confronti del Collaboratore e il Collaboratore non avrà alcuna responsabilità nei confronti di UK Biobank per qualsiasi:

10.2.1 perdita di profitto (diretta, indiretta o conseguente);

10.2.2 perdita di utilizzo, perdita di ricavi, perdita di produzione o perdita di affari (in ogni caso diretta, indiretta o consequenziale);

10.2.3 perdita di avviamento, perdita di reputazione o perdita di opportunità (in ogni caso diretta, indiretta o consequenziale);

10.2.4 perdita di risparmi anticipati o perdita di margine (in ogni caso, diretta, indiretta o consequenziale);

10.2.5 perdita di utilizzo o di valore di qualsiasi dato o software (in ogni caso diretta, indiretta o consequenziale); oppure

³ <https://ico.org.uk/for-organisations/guide-to-data-protection/guide-to-the-general-data-protection-regulation-gdpr/controllers-and-processors/what-does-it-mean-if-you-are-a-controller/#1>

10.2.6 perdite indirette o conseguenti.

10.3 Nulla di quanto contenuto nel presente MTA opererà per escludere o limitare qualsiasi responsabilità che non può essere legalmente limitata, inclusa, ma non solo, la responsabilità per:

10.3.1 morte o lesioni personali causate da negligenza;

10.3.2 per frode o falsa dichiarazione fraudolenta; e

10.3.3 per qualsiasi questione per la quale non è consentito dalla legge escludere o limitare, o tentare di escludere o limitare, la propria Responsabilità.

10.4 A scanso di equivoci, UK Biobank non avrà alcuna responsabilità (compresa, ma senza limitazione, qualsiasi responsabilità relativa al prodotto) per qualsiasi scoperta, prodotto, test o trattamento sviluppato direttamente o indirettamente dal Collaboratore utilizzando i Materiali.

10.5 Nulla di quanto contenuto nel presente MTA potrà operare per escludere o limitare la responsabilità del Collaboratore nei confronti di UK Biobank per qualsiasi perdita, danno, costo o spesa derivanti da:

10.5.1 il mancato rispetto da parte del Collaboratore della clausola 9 (Protezione dei dati) e delle clausole da 14.5 a 14.10 incluse (**Third Party Processor**);

10.5.2 qualsiasi violazione della clausola 2.2 o qualsiasi circostanza in cui i Collaboratori concedano in sublicenza, distribuiscano o condividano in altro modo i Materiali (compresi i DPI) con qualsiasi persona o terzo non autorizzato;

10.5.3 qualsiasi circostanza di cui alle clausole 4.5 e 4.7; e

10.5.4 qualsiasi Incidente di Sicurezza dei Dati causato dal Collaboratore.

11. Termine

11.1 La durata del presente MTA avrà inizio alla Data di Efficacia e terminerà alla Data di Completamento, a meno che non venga interrotto prima in conformità alla clausola 12 o in conformità alla legge. La Data di completamento del Collaboratore sarà la stessa data della Data di completamento del Richiedente per il Progetto di ricerca approvato.

11.2 Il termine del presente MTA può essere prorogato dal collaboratore (e con l'accordo di UK Biobank) durante l'ultimo anno del progetto di ricerca approvato con i seguenti incrementi di un (1) anno:

11.2.1 per un periodo minimo di un (1) anno;

11.2.2 per un periodo di due (2) anni; o

11.2.3 per un periodo massimo di tre (3) anni;

su richiesta alla UK Biobank, indicando (in modo ragionevolmente dettagliato) le ragioni della richiesta di proroga e subordinatamente al pagamento delle relative ulteriori spese di accesso. A scanso di equivoci, qualsiasi richiesta di proroga presentata dal Collaboratore deve riguardare lo stesso periodo richiesto dal Richiedente.

11.3 A scanso di equivoci, le proroghe di cui alla precedente clausola 11.2 possono essere applicate cumulativamente (nel rispetto dei costi di accesso applicabili) in modo tale che, ad esempio, possa essere concessa una proroga di 3 anni per portare la durata del Progetto di Ricerca Approvato da 3 anni a 6 anni, per poi essere prorogata di altri 3 anni fino a 9 anni e così via.

12. Risoluzione e conseguenze della risoluzione

12.1 UK Biobank avrà il diritto di rescindere immediatamente il presente MTA mediante comunicazione scritta al Collaboratore se:

12.1.1 il Collaboratore commette una qualsiasi violazione di una disposizione sostanziale del presente MTA o una violazione sostanziale del presente MTA e, nel caso di una violazione cui si possa porre rimedio, non vi pone rimedio entro 10 giorni dal ricevimento di una comunicazione scritta che fornisca i dettagli della violazione e richieda di porvi rimedio;

12.1.2 il Collaboratore cessa, rischia di cessare o minaccia di cessare l'attività o subisce un Evento di Insolvenza, o è soggetto a una grave constatazione normativa negativa; oppure

12.1.3 l'MTA del Richiedente viene terminato (per qualsiasi motivo).

12.2 Alla scadenza dell'MTA ai sensi della clausola 11.1 o alla risoluzione del presente MTA da parte di UK Biobank ai sensi della clausola 12.1 o in conformità alla legge:

12.2.1 la concessione dei diritti e di tutte le licenze al Collaboratore ai sensi del presente MTA si risolverà automaticamente; e

12.2.2 il Collaboratore dovrà distruggere i Materiali o renderli altrimenti definitivamente inaccessibili e confermare per iscritto a access@ukbiobank.ac.uk che ciò è stato fatto. A scanso di equivoci, il Collaboratore non è tenuto a distruggere i Dati sui Risultati o gli Altri Dati a condizione che vengano rispettate le disposizioni del presente MTA.

12.3 Fatto salvo quanto sopra e qualsiasi altro diritto o rimedio di cui UK Biobank possa disporre, UK Biobank può adottare le seguenti misure in caso di violazione che dia diritto a UK Biobank di rescindere il presente MTA ai sensi della clausola 12.1:

12.3.1 può vietare al Collaboratore principale, ai Ricercatori Collaboratori e a qualsiasi altro Ricercatore dell'Istituzione Collaboratrice di accedere a qualsiasi altro Materiale della risorsa UK Biobank per un periodo di tempo indefinito; e/o

12.3.2 può decidere di informare il personale pertinente all'interno dell'istituto collaboratore inadempiente, i finanziatori del collaboratore principale inadempiente e/o gli organi di governo o altri organi normativi pertinenti.

12.4 Nonostante la risoluzione del presente MTA per qualsiasi motivo, le disposizioni delle clausole 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16 e 17 continueranno ad essere in vigore secondo i rispettivi termini.

12.5 La risoluzione o la scadenza del presente MTA non pregiudica i diritti e gli obblighi delle parti maturati alla data della risoluzione o della scadenza.

13. Avvisi

13.1 Le comunicazioni richieste dal presente MTA dovranno essere effettuate per iscritto e dovranno essere:

13.1.1 inviati via e-mail agli indirizzi indicati di seguito; oppure

13.1.2 (in caso di mancato recapito di un'e-mail) per posta all'indirizzo registrato di UK Biobank o del collaboratore.

13.2 Qualsiasi comunicazione si considera ricevuta:

13.2.1 se inviato via e-mail, al momento della ricezione da parte del server di posta elettronica del destinatario (o, se questo momento cade al di fuori dell'orario di lavoro nel luogo di ricezione, alla ripresa dell'orario di lavoro); o

13.2.2 se inviato per posta, alla data di consegna se è un giorno lavorativo nel luogo di ricezione (o, se non è un giorno lavorativo, il primo giorno lavorativo successivo).

13.3 Le notifiche a UK Biobank devono essere inviate al team di accesso all'indirizzo access@ukbiobank.ac.uk. Le comunicazioni al collaboratore devono essere inviate per posta elettronica al collaboratore interessato e al collaboratore principale.

14. Affiliati, cessione e subappalto

Affiliati

14.1 I diritti concessi al Collaboratore ai sensi del presente MTA per il Progetto di Ricerca Approvato includono le Affiliate del Collaboratore, a condizione che il Collaboratore:

14.1.1 fornisca i dettagli aggiornati di ciascuna Affiliata nel modulo di conferma annuale presentato a UK Biobank su base annuale in conformità alla clausola 7.1 dell'MTA;

14.1.2 rimanga pienamente responsabile e responsabile nei confronti di UK Biobank per tutti gli atti, le inadempienze e le omissioni di ciascuna delle sue Affiliate come se fossero proprie del Collaboratore; e

14.1.3 garantisca che ciascuna delle sue Affiliate rispetti i termini e le condizioni del presente MTA.

Assegnazione

14.2 Né UK Biobank né il Collaboratore avranno il diritto di cedere il presente MTA o uno qualsiasi dei propri diritti o obblighi senza aver prima ricevuto l'approvazione scritta dell'altra parte, approvazione che non dovrà essere irragionevolmente rifiutata o ritardata.

Subappalto

14.3 Fatta eccezione per le circostanze di cui alla clausola 14.5, il Collaboratore non potrà subappaltare l'esecuzione di alcuno dei suoi obblighi nell'ambito dell'MTA o di una parte di esso senza aver prima ottenuto il consenso scritto di UK Biobank, consenso che non dovrà essere irragionevolmente negato.

14.4 Nel caso in cui il consenso sia concesso ai sensi della clausola 14.3, il Collaboratore interessato sarà responsabile degli atti, delle inadempienze e delle omissioni dei suoi subappaltatori come se fossero

propri del Collaboratore stesso, e qualsiasi consenso dato non solleva tale Collaboratore interessato da nessuno dei suoi obblighi ai sensi del presente MTA.

Third Party Processor

14.5 UK Biobank riconosce e accetta che il Collaboratore possa subappaltare a terze parti l'elaborazione dei materiali esclusivamente per gli scopi consentiti e solo in relazione a elementi discreti di calcolo e analisi dei dati (tali elaboratori sono "**Third Party Processors**"). Il Collaboratore deve rispettare e incaricare gli Incaricati del trattamento di terze parti solo in stretta conformità con i termini stabiliti nelle clausole da 14.6 a 14.10 incluse.

14.6 Il Collaboratore garantisce che il **Third Party Processor** non è un Collaboratore e sarà impegnato solo ai fini di elementi discreti di calcolo e analisi dei dati in relazione allo Scopo consentito (il "**Processor Task**").

14.7 Prima di ingaggiare un **Third Party Processor**, il Collaboratore deve condurre e documentare la seguente valutazione:

14.7.1 se il Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** è necessario per il perseguimento degli obiettivi di ricerca del Progetto di ricerca approvato;

14.7.2 se il Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** è un destinatario idoneo per i dati sia in termini di provenienza della sicurezza dei dati passati che di utilizzo/attività dei dati passati (ad esempio Cambridge Analytica non sarebbe idonea); e

14.7.3 se il Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** è in grado di fornire sufficienti garanzie che elaborerà i *Materiali* in modo da soddisfare i requisiti della legislazione sulla protezione dei dati.

14.8 Il Collaboratore deve:

14.8.1 rimanere pienamente responsabile nei confronti di UK Biobank per tutti gli atti, le inadempienze e le omissioni del Responsabile del trattamento di **Third Party Processor**, come se fossero propri del Collaboratore;

14.8.2 fornire al **Third Party Processor** solo i Materiali strettamente necessari all'esecuzione dell'Incarico di Elaborazione da parte del **Third Party Processor**;

14.8.3 fornire i dettagli di ciascun **Third Party Processor** e dell'Attività dell'Elaboratore nel Modulo di conferma annuale presentato a UK Biobank su base annuale in conformità alla clausola 7.1 dell'MTA; e

14.8.4 incaricare il Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** solo sulla base di un accordo scritto con il Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** prima di qualsiasi trasferimento di dati o elaborazione di Materiali. Tale accordo deve includere, tra l'altro:

(a) una chiara definizione e portata dell'incarico di elaborazione, compreso l'accordo di elaborare i dati solo in conformità alle istruzioni documentate del collaboratore;

(b) autorizzare il **Third Party Processor** solo a svolgere l'Incarico di Responsabile del Procedimento e a non compiere alcun altro atto, a meno che non sia espressamente autorizzato a farlo;

(c) memorizzare, elaborare e utilizzare i Materiali secondo gli standard di sicurezza stabiliti nell'MTA (come minimo) e implementare adeguate misure di sicurezza tecniche e organizzative per proteggere i Materiali da un incidente di sicurezza dei dati;

(d) cancellare (o rendere permanentemente inaccessibili) i Materiali (e qualsiasi dato generato come risultato dell'Attività di elaborazione) una volta completata l'Attività di elaborazione;

(e) confermare che il **Third Party Processor** non ha alcun diritto (direttamente o indirettamente) sui Materiali (o sui dati da essi derivati) o su qualsiasi cosa che il Collaboratore abbia creato o realizzato nell'ambito del progetto di ricerca approvato (che è coperto dall'MTA tra UK Biobank e il collaboratore);

(f) confermare che il **Third Party Processor** è vincolato dalle disposizioni equivalenti a quelle contenute nell'MTA, tra cui, a titolo esemplificativo e non esaustivo: a) non trasferire i dati Materiali (o i dati da essi derivati) a terzi e b) non fare alcun tentativo per identificare nuovamente un Partecipante;

(g) che il **Third Party Processor** fornisca sufficienti garanzie di elaborare i Materiali in modo da soddisfare i requisiti della legislazione sulla protezione dei dati; e

(h) che il Collaboratore ha il diritto unilaterale e illimitato di risolvere immediatamente il suo accordo con il **Third Party Processor** nel caso in cui si verifichi un problema sostanziale (compresa una violazione del diritto di proprietà del Collaboratore da parte del **Third Party**

Processor di una qualsiasi delle disposizioni di cui sopra).

14.9 Il Collaboratore deve tenere sotto controllo le attività del **Third Party Processor** al fine di garantire il rispetto delle clausole da 14.5 a 14.10 incluse.

14.10 Nel caso in cui UK Biobank sollevi dubbi sull'identità del Responsabile del trattamento di **Third Party Processor** o sulle attività di un **Third Party Processor**, il Collaboratore dovrà indagare e riferire tempestivamente sulla questione. UK Biobank può richiedere, se ragionevolmente necessario (e previo dialogo con il Collaboratore), al Collaboratore di:

14.10.1 effettuare un audit al **Third Party Processor**; e/o

14.10.2 risolvere il contratto con il **Third Party Processor**.

15. Forza maggiore

15.1 Se una parte è impossibilitata, ostacolata o ritardata nell'adempimento di uno qualsiasi dei suoi obblighi ai sensi del presente MTA a causa di un Evento di Forza Maggiore, tale parte dovrà prontamente notificare all'altra la data di inizio e gli effetti dell'Evento di Forza Maggiore sulla sua capacità di adempiere ai propri obblighi ai sensi del presente MTA. Se le parti lo concordano, gli obblighi della parte interessata saranno sospesi per tutto il tempo in cui l'evento di forza maggiore si protrarrà.

15.2 La parte colpita da un Evento di Forza Maggiore non sarà responsabile per l'inadempimento o il ritardo nell'adempimento dei propri obblighi impediti, ostacolati o ritardati dall'Evento di Forza Maggiore, a condizione che tale parte faccia ogni ragionevole sforzo per minimizzarne gli effetti e riprenda l'adempimento non appena possibile dopo la rimozione di tale Evento di Forza Maggiore. Se il periodo di inadempimento supera i 90 giorni dall'inizio dell'Evento di Forza Maggiore, la parte non interessata avrà la facoltà, mediante comunicazione scritta all'altra parte, di risolvere il presente MTA con un preavviso scritto di trenta (30) giorni.

15.3 Le disposizioni della presente clausola 15 non pregiudicano qualsiasi altro diritto di una parte di risolvere il presente MTA.

16. Risoluzione delle controversie

16.1 Qualora sorga una Controversia, le parti seguiranno la procedura prevista dalla presente clausola 16.

16.2 Ciascuna parte può notificare all'altra per iscritto una controversia, indicandone la natura e tutti i dettagli ("**Avviso di controversia**"), insieme ai relativi documenti giustificativi. Entro cinque (5) giorni lavorativi dalla notifica dell'avviso di controversia, un rappresentante di UK Biobank e un rappresentante del Collaboratore tenderanno in buona fede di risolvere la controversia.

16.3 Se, per qualsiasi motivo, i rispettivi rappresentanti delle parti non sono in grado di risolvere la controversia entro dieci (10) giorni lavorativi dall'avviso di controversia, una qualsiasi delle parti coinvolte nella controversia può sottoporla alla discussione del ricercatore principale di UK Biobank e di uno o più alti funzionari del collaboratore. Questi rappresentanti di alto livello delle parti (o i loro rispettivi incaricati) cercheranno di organizzare tempestivamente un incontro o una telefonata o videoconferenza al fine di risolvere la controversia.

16.4 Se, in seguito all'escalation di qualsiasi controversia come stabilito nella clausola 16.3, il Principal Investigator di UK Biobank e il/gli appropriato/i funzionario/i senior del Collaboratore non sono in grado, per qualsiasi motivo, di risolvere la controversia entro trenta (30) giorni lavorativi da quando è stata loro sottoposta, le parti concordano di avviare una mediazione in buona fede per risolvere la controversia in conformità con la procedura modello di mediazione del Centre for Effective Dispute Resolution (CEDR). Salvo diverso accordo tra le parti, entro 20 giorni lavorativi dalla notifica dell'Avviso di controversia, il mediatore sarà nominato dal CEDR. Per avviare la mediazione, una parte deve notificare per iscritto all'altra parte della Controversia il rinvio della Controversia alla mediazione.

16.5 A scanso di equivoci, le controversie relative a questioni scientifiche o tecniche o a decisioni aziendali, e non a questioni legali, devono essere risolte con i rappresentanti senior.

16.6 Se la Controversia non viene risolta con la mediazione entro 10 giorni lavorativi dall'inizio della stessa o entro un ulteriore periodo concordato per iscritto dalle parti, ciascuna di esse può avviare un procedimento giudiziario ai sensi della clausola 17.10 del presente MTA.

16.7 Nulla di quanto contenuto nella presente clausola 16 servirà a impedire a una delle parti di richiedere un provvedimento provvisorio/giuntivo per tutelare i propri diritti e interessi in qualsiasi tribunale dell'Inghilterra e del Galles; a condizione che tale provvedimento non impedisca o sospenda alcuna mediazione.

17. Generale

17.1 Le parti concordano che il Collaboratore può cambiare il Collaboratore principale in qualsiasi momento e di volta in volta, mediante comunicazione scritta a UK Biobank.

17.2 Il presente MTA disciplina e costituisce l'intero accordo tra le parti e annulla, sostituisce ed estingue tutti gli

accordi, le promesse, le assicurazioni, le garanzie, le dichiarazioni e le intese precedenti tra le parti (sia orali che scritte) relative all'oggetto del presente documento. Inoltre, ciascuna parte riconosce e accetta di non fare affidamento su, e di non avere alcun rimedio in relazione a, qualsiasi dichiarazione, promessa, assicurazione, affermazione, garanzia, impegno o dichiarazione fatta (sia in modo innocente che per negligenza) dall'altra parte o da qualsiasi altra persona, ad eccezione di quanto espressamente stabilito nel presente MTA, rispetto al quale il suo unico rimedio sarà la violazione del contratto.

17.3 In caso di conflitto tra le disposizioni del presente MTA e uno qualsiasi degli Allegati, si applicheranno le disposizioni del relativo Allegato.

17.4 Una rinuncia, un ritardo o un'astensione da parte di una qualsiasi delle parti, espressa o implicita, nell'applicazione o nell'esercizio di uno qualsiasi dei suoi diritti o rimedi previsti dal presente documento non costituirà una rinuncia a tale diritto o rimedio, a meno che non sia indicato per iscritto e firmato dalla parte rinunciataria.

17.5 Nessuna disposizione del presente MTA è destinata ad essere applicata da persone che non sono parti del presente MTA, né sono concessi diritti a terzi per legge o altro.

17.6 Nessuna disposizione del presente MTA creerà una partnership, una joint venture o un rapporto di agenzia tra le parti.

17.7 Tutte le variazioni al presente MTA devono essere concordate, esposte per iscritto e firmate a nome delle parti prima di entrare in vigore.

17.8 Se una disposizione o una parte di disposizione del presente MTA è o diventa non valida, illegale o inapplicabile, sarà considerata eliminata, ma ciò non pregiudicherà la validità e l'applicabilità del resto del presente MTA.

17.9 Se una disposizione o una parte di disposizione del presente MTA viene considerata eliminata ai sensi della clausola 17.8, le parti dovranno negoziare in buona fede per concordare una disposizione sostitutiva che, nella massima misura possibile, raggiunga il risultato commerciale previsto dalla disposizione originale.

17.10 Il presente MTA e qualsiasi controversia o reclamo (comprese le controversie o i reclami extracontrattuali) derivanti da o in relazione ad esso o al suo oggetto o alla sua formazione saranno disciplinati e interpretati in conformità alle leggi dell'Inghilterra e del Galles. Fatta salva la clausola 16 di cui sopra, le parti concordano irrevocabilmente che i tribunali inglesi avranno giurisdizione esclusiva su qualsiasi causa, azione, procedimento o controversia derivante da, o in connessione con il presente MTA o il suo oggetto o la sua formazione.

Il presente MTA viene eseguito da rappresentanti debitamente autorizzati delle parti.

A nome e per conto della UK Biobank: A nome e per conto dell'istituzione collaboratrice: Firma: Firma:

Stampa nome: Stampa nome:

Posizione: Posizione:

Data: Data:

Sono il Lead Collaborator di questo Progetto di Ricerca approvato e firmando qui sotto confermo di aver letto e compreso le disposizioni del presente MTA.

Firma:

Nome a stampa: Posizione:

Data:

Antinisca Di Marco Professore associato 19/10/2022

Definizioni

Spese di accesso: le spese dovute dal Richiedente (che possono includere l'IVA) per accedere ai Materiali e per consentire al Collaboratore di accedere ai Materiali, come riassunto nell'Allegato 4 e dettagliato nella sezione di pagamento della Domanda su AMS.

Affiliato: qualsiasi società o altra entità che sia direttamente o indirettamente controllante, controllata o sottoposta a controllo comune con un Collaboratore (il che include se tale Collaboratore è una società, una società controllata o controllante o una holding di tale Collaboratore, o una società controllata di tale controllante o holding) fintanto che esiste tale controllo.

Tutti gli sforzi ragionevoli: in relazione a una parte obbligata a utilizzare "Tutti gli sforzi ragionevoli", il perseguimento di una linea di azione ragionevole per raggiungere il risultato dichiarato che può richiedere spese ragionevoli, ma non richiede alla parte di perseguire ogni linea di azione disponibile per raggiungere il risultato o di agire al di fuori dei propri interessi operativi o commerciali.

AMS: il sistema di gestione degli accessi online che il collaboratore utilizza per richiedere e gestire il proprio accesso alla risorsa UK Biobank.

Richiedente o Istituzione Richiedente: l'organizzazione (ad es. Università, società o altra entità giuridica identificabile) con cui il Collaboratore sta collaborando in relazione al Progetto di Ricerca Approvato e da cui un PI Richiedente è impiegato o altrimenti legato contrattualmente.

Richiesta: la richiesta del Collaboratore principale e della sua istituzione a UK Biobank per l'accesso ai materiali da utilizzare in relazione al progetto di ricerca approvato.

Principal Investigator del Richiedente o PI del Richiedente: il ricercatore principale del Richiedente del progetto di ricerca approvato.

Ricercatore del Richiedente: un ricercatore del Richiedente che lavora con un PI del Richiedente al Progetto di ricerca approvato.

Progetto di ricerca approvato: il progetto di ricerca approvato da UK Biobank (comprese le condizioni o le clausole stabilite da UK Biobank) e come indicato nell'Allegato 4.

Collaboratore o Istituzione collaboratrice: l'organizzazione (ad es. Università, società o altra persona giuridica identificabile) che impiega il Lead Collaborator che presenta la domanda per collaborare con il Richiedente e il Richiedente PI al progetto di ricerca approvato.

Informazioni riservate del collaboratore: come definite nella clausola 8.1 del presente MTA.

Invenzioni generate dai collaboratori: come definite nella clausola 3.5 del presente MTA.

Ricercatore collaboratore: un ricercatore che lavora con il Lead Collaborator presso un'istituzione collaboratrice sul progetto di ricerca approvato.

Data di completamento: la data o le date contenute nell'Allegato 4 per la fine del Progetto di ricerca approvato, comprese eventuali proroghe.

Controllo: indica il possesso diretto o indiretto di almeno il cinquanta per cento (50%) delle azioni in circolazione o di altri diritti di voto dell'entità soggetta che hanno il potere di votare o di dirigere gli affari dell'entità (o una percentuale inferiore che è la massima consentita per essere posseduta da una società straniera in una particolare giurisdizione), e "Controllante" e "Controllato" devono essere interpretati di conseguenza.

Responsabile del trattamento, incaricato del trattamento, soggetto interessato, dati personali, elaborazione (e trattamento) e categorie speciali di dati personali: hanno il significato attribuito dalla legislazione sulla protezione dei dati;

Legislazione in materia di protezione dei dati: indica tutte le leggi applicabili (in tutto o in parte) al trattamento dei dati personali da parte di una delle parti ai sensi del presente MTA o in relazione ad esso, tra cui, a seconda dei casi: (i) il GDPR in quanto parte del diritto del Regno Unito in virtù dell'articolo 3 dell'European Union (Withdrawal) Act 2018 (il "**GDPR del Regno Unito**"); (ii) l'UK Data Protection Act 2018; (iii) il Privacy and Electronic Communications (EC Directive) Regulations 2003 in quanto continua ad avere effetto in virtù dell'articolo 2 dell'European Union (Withdrawal) Act 2018; e (iv) qualsiasi altra legge in vigore nel Regno Unito di volta in volta applicabile (in tutto o in parte) al trattamento dei dati personali, in ogni caso come modificata o sostituita di volta in volta.

Incidente di sicurezza dei dati: come definito nella clausola 4.2 dell'MTA.

Controversia: qualsiasi disputa, controversia, procedimento o reclamo (comprese le controversie legali) tra UK Biobank, da un lato, e il Collaboratore, dall'altro, derivanti da o in relazione al presente MTA o all'esecuzione, validità o applicabilità dello stesso.

Data di entrata in vigore: la data in cui il presente MTA viene eseguito da un firmatario autorizzato di UK Biobank, essendo già stato firmato dall'istituzione collaboratrice e sottoscritto come "letto e compreso" dal collaboratore principale pertinente.

Risultati: come definiti nella clausola 3.1.2 del presente MTA e significa letteralmente ciò che viene trovato, in termini di conclusioni e risultati, dal Collaboratore come risultato del Progetto di Ricerca Approvato. Per chiarezza, i risultati non includono le invenzioni generate dal Collaboratore e nemmeno i risultati derivanti da dati che non sono materiali della UK Biobank.

Evento di forza maggiore: qualsiasi causa derivante o attribuibile ad atti, eventi, omissioni o incidenti al di fuori del ragionevole controllo della parte interessata, inclusi, a titolo esemplificativo e non esaustivo, cause di forza maggiore, guerre, sommosse, disordini civili, inadempimento da parte di subappaltatori o fornitori, rispetto di qualsiasi legge o ordine governativo, norma, regolamento o direttiva, incidente, guasto di impianti o macchinari, guasto di fornitura, epidemia, pandemia, incendio, inondazione o tempesta.

Evento di insolvenza: indica il caso in cui un soggetto non sia in grado di pagare i propri debiti ai sensi dell'articolo 123 dell'Insolvency Act del 1986 (senza che sia necessario l'accertamento da parte di un tribunale), abbia un amministratore, un curatore, un curatore amministrativo o un manager nominato sulla totalità o su una parte dei suoi beni, stipuli un concordato con i creditori in generale, o abbia un ordine emesso o una risoluzione approvata per la sua liquidazione (a meno che non sia parte di un piano di fusione o ricostruzione solvente) o subisca un processo simile o equivalente in qualsiasi giurisdizione o subisca qualsiasi altro accordo che influisca sui diritti dei creditori;

Diritti di proprietà intellettuale o DPI: tutti i diritti di proprietà intellettuale esistenti e futuri, inclusi, a titolo esemplificativo, brevetti, marchi commerciali e di servizio, diritti di design, diritti d'autore, diritti di database, segreti commerciali e know-how, in tutti i casi che siano registrati o meno o registrabili, e incluse tutte le registrazioni e le domande di registrazione di uno qualsiasi di questi e i diritti di richiedere gli stessi, nonché tutti i rinnovi, le estensioni, le prosezioni, le combinazioni o le divisioni degli stessi, e tutti i diritti e le forme di protezione di natura simile o aventi effetti equivalenti o simili a uno qualsiasi di questi, ovunque nel mondo.

Collaboratore principale: lo sperimentatore principale in relazione alla domanda presso l'istituto collaboratore.

Responsabilità: la responsabilità derivante da o in relazione al presente MTA, sia per contratto, illecito civile, falsa dichiarazione, restituzione, ai sensi della legge o altro, compresa, ma non solo, la responsabilità derivante da una violazione, o da un mancato adempimento, da un difetto o da un ritardo nell'adempimento di uno qualsiasi degli obblighi di una parte ai sensi del presente MTA, in ogni caso in qualsiasi modo causata, anche se causata da negligenza.

Materiali: i dati di cui all'Allegato 4 forniti da UK Biobank al Collaboratore nell'ambito o in relazione al presente MTA, compresi i dati a livello di partecipante.

MTA: il presente Contratto di Trasferimento di Materiale, i Termini e le Condizioni del Collaboratore (compresi i documenti e/o i materiali a cui si fa riferimento in essi), gli Allegati e, ove applicabile, il contenuto del Modulo di Richiesta del Collaboratore.

Avviso di controversia: come definito nella clausola 16.2 dell'MTA.

Altri dati: come definiti nella clausola 3.1.3 dell'MTA.

Partecipanti: le persone che partecipano alla UK Biobank.

Dati a livello di partecipante: i dati personali descritti nell'Allegato 1 contenuti nei Materiali e qualsiasi dato generato applicabile (come descritto nella clausola 3.1 dell'MTA).

Scopo consentito: condurre il Progetto di Ricerca Approvato in conformità con l'ambito del progetto approvato e con le tempistiche indicate nell'Allegato 4, nel rispetto delle disposizioni del presente MTA.

Dati sui risultati: come definiti nella clausola 3.1.1 del presente MTA.

Termine: come definito nella clausola 11.1 del presente MTA.

Elaboratori terzi: come definiti nella clausola 14.5 del presente MTA.

UK Addendum: indica l'Addendum internazionale sul trasferimento dei dati alle Clausole contrattuali standard della Commissione UE emesso dal Commissario per l'Informazione del Regno Unito ai sensi della s.119A(1) del Data Protection Act 2018, di cui, attualmente in vigore, è disponibile all'indirizzo <https://ico.org.uk/media/for-organisations/documents/4019539/international-data-transfer-addendum.pdf>, o come può essere modificato o sostituito dal Commissario per l'Informazione del Regno Unito di volta in volta.

IVA: imposta sul valore aggiunto applicabile ai sensi della legge sull'imposta sul valore aggiunto del 1994 (e relative modifiche e aggiornamenti) o qualsiasi altra imposta sostitutiva o aggiuntiva simile.

Annex 1

Descrizione del trattamento dei dati e addendum per il Regno Unito

Il presente Allegato 1 costituisce parte integrante del presente MTA. La parte A (Descrizione del trattamento dei dati) descrive i tipi di dati a livello di partecipante divulgati da UK Biobank al Collaboratore, al Collaboratore principale e ai Ricercatori collaboratori per essere trattati rigorosamente per gli scopi consentiti descritti nel presente MTA (o come altrimenti concordato per iscritto dalle parti). La parte B (Addendum per il Regno Unito) definisce le modalità di compilazione dell'Addendum per il Regno Unito e le informazioni aggiuntive richieste dall'Addendum per il Regno Unito. ⁴

PARTE A - Descrizione del trattamento dei dati

Soggetti interessati	I partecipanti
Categorie di dati	I dati a livello di partecipante da trattare riguardano le seguenti categorie di dati personali: · EID - gli identificatori codificati e unici pseudonimizzati, che sono specifici del progetto di ricerca approvato; e • dati derivati dalle risposte al questionario di riferimento e dalle interviste che non contengono dati di categorie speciali, come il luogo di nascita, i primi anni di vita e di istruzione, la storia lavorativa, lo stato civile e il numero di figli.
Categorie particolari di dati	I dati a livello di partecipante da trattare riguardano le seguenti categorie speciali di dati: La risorsa UK Biobank contiene dati sanitari, genetici e biometrici. Tutte le categorie speciali di dati contenute nei materiali sono anonimizzati (gli identificatori diretti e indiretti vengono rimossi). I tipi di dati di categoria speciale possono includere: • misure del fenotipo del Partecipante, come altezza, peso e pressione sanguigna (circa 2.000 fenotipi per Partecipante, come ulteriormente dettagliato qui http://biobank.ndph.ox.ac.uk/showcase/schema.cgi?id=1) · Misure del genoma del partecipante, compresi i dati relativi al genotipo, alla sequenza dell'esoma e all'intera sequenza; · biomarcatori creati dal dosaggio dei campioni del Partecipante, che comprendono biomarcatori comuni (come il colesterolo), marcatori di malattie infettive, marcatori proteomici e metabolomici; · Dati di imaging (su un massimo di 100.000 Partecipanti) come risultato di scansioni MRI della testa, del cuore e del corpo, oltre a ecografie e DEXA; e • dati derivati da collegamenti di cartelle cliniche, compresi i registri ospedalieri, i registri delle cure primarie, i registri dei decessi e dei tumori o qualsiasi altra fonte di dati clinici; e · altri dati di categoria speciale derivati da risposte a questionari di base/online e interviste, come l'anamnesi di malattie pregresse, misure dietetiche, cognitive e fisiche.
Scopo del trasferimento	Il trasferimento viene effettuato per consentire al Collaboratore di svolgere lo scopo consentito.
Destinatari	I dati trasferiti a livello di partecipante possono essere divulgati solo ai seguenti destinatari o categorie di destinatari: • personale autorizzato all'interno del Collaboratore, ovvero il Collaboratore principale e i Ricercatori collaboratori; • Responsabili del trattamento di terze parti soggetti alle disposizioni pertinenti dell'MTA; · Affiliati soggetti alle disposizioni pertinenti dell'MTA; • le forze dell'ordine che agiscono in base alla legislazione sulla protezione dei dati; • l'autorità competente per la protezione dei dati che agisce ai sensi della legislazione sulla protezione dei dati; e · i revisori dei conti (UK Biobank o terzi appropriati).
Attività di elaborazione	I dati a livello di partecipante saranno soggetti alle seguenti attività di trattamento di base: • accesso e utilizzo dei Dati a livello di partecipante all'interno della piattaforma di analisi della ricerca per le finalità consentite; • Se approvato da UK Biobank, la trasmissione, la messa a disposizione e l'archiviazione sui sistemi/server di rete del Collaboratore, ad esclusione di qualsiasi file WGS (whole genome sequence) o WES (whole exome sequence) che non devono essere trasmessi o scaricati dalla piattaforma di analisi della ricerca; • operazioni di ricerca, compresa un'attività di elaborazione da parte di un Elaboratore terzo; e · gestione del rischio, conformità, funzioni legali e di revisione.
La Biobanca del Regno Unito è legittima base per la condivisione dati personali	Dati personali: • Interessi legittimi (articolo 6, paragrafo 1, lettera f) del GDPR britannico) Categorie particolari di dati:

⁴ Per ulteriori informazioni sulle clausole di protezione dei dati di questo MTA e per una spiegazione della posizione di UK Biobank in relazione alla protezione dei dati, si prega di consultare le FAQ sul sito web di UK Biobank (che saranno aggiornate da UK Biobank di volta in volta).

	• Finalità di ricerca scientifica (articolo 9, paragrafo 2, lettera j) del GDPR britannico)
Dettagli di contatto per il DPO della UK Biobank:	UK Biobank DPO DPO@ukbiobank.ac.uk ⁵
Dati di contatto (titolo di lavoro e indirizzo e-mail) per il DPO del collaboratore (o altro contatto per la protezione dei dati). scopi):	

PARTE B - Addendum per il Regno Unito

Qualora la clausola 9.4 del presente MTA si applichi al Collaboratore, l'Addendum per il Regno Unito sarà automaticamente incorporato nel presente MTA per riferimento e si riterrà completato come indicato di seguito:

- nella Tabella 1 dell'Addendum del Regno Unito:
 - la data di inizio dell'Addendum per il Regno Unito sarà la Data di efficacia del presente Contratto;
 - UK Biobank sarà l'*esportatore* e il Richiedente sarà l'*importatore*; e
 - i dati delle parti e i contatti chiave sono quelli di UK Biobank e del collaboratore, come indicato di seguito.
- nella tabella 2 dell'addendum per il Regno Unito sarà selezionata la seconda opzione (ossia *le CSA approvate dall'UE, comprese le informazioni dell'appendice e con l'entrata in vigore dei soli moduli, clausole o disposizioni opzionali delle CSA approvate dall'UE ai fini del presente addendum*), e:
 - Si applicherà il modulo 1 (da controllore a controllore) (i moduli 2 (da controllore a processore), 3 (da processore a processore) e 4 (da processore a controllore) non si applicheranno);
 - la clausola opzionale 7 (clausola di attracco) non si applica; e
 - La clausola opzionale 11 (Opzione) non si applica.
- nella Tabella 3 dell'Addendum del Regno Unito:
 - Allegato 1A, Elenco delle parti: sarà completato con le informazioni indicate nella sezione Elenco delle parti di seguito riportata;
 - Allegato 1B, Descrizione del trasferimento: sarà compilato con le informazioni indicate nella sezione Descrizione del trasferimento di seguito riportata; e
 - Allegato II: sarà completato con le informazioni di cui all'Allegato 2 (Misure di sicurezza) del presente MTA.
- nella tabella 4 dell'addendum per il Regno Unito: le opzioni *Esportatore* e *Importatore* si considerano verificate.

Le parti	Esportatore	Importatore
Dettagli delle parti	Nome: UK Biobank Limited Indirizzo: Unità 1 - 2 Spectrum Way Stockport Cheshire SK3 0SA N. azienda: 4978912	Nome: Il nome legale completo del Collaboratore come identificato a pagina 1 del presente MTA. Indirizzo: L'indirizzo registrato del Collaboratore.
Contatto chiave	Biobanca del Regno Unito DPO DPO@ukbiobank.ac.uk	La qualifica e i dati di contatto del referente presso il collaboratore identificato sopra nella parte A del presente Allegato 1.
Elenco delle parti	UK Biobank e il Collaboratore come sopra indicato.	
Descrizione del trasferimento	Il trasferimento viene effettuato per consentire al Collaboratore di svolgere lo scopo consentito.	

⁵Tutte le domande (relative a un progetto di ricerca, all'applicazione, all'MTA o altro) devono essere inviate in prima istanza all'Access Team (access@ukbiobank.ac.uk).

Annex 2

Misure di sicurezza

La UK Biobank ha l'obbligo, ai sensi del GDPR del Regno Unito, di garantire che i suoi materiali siano conservati, recuperati e utilizzati in modo sicuro, con misure organizzative e tecniche adeguate. La UK Biobank deve inoltre adottare misure ragionevoli per garantire che i materiali che condivide continuino a essere protetti con una sicurezza adeguata. Il presente Allegato 2 fa parte dell'MTA e rappresenta un livello generico di standard di sicurezza per l'archiviazione, il recupero e l'utilizzo dei dati che il Collaboratore deve rispettare. Il presente Allegato 2 può essere aggiornato da UK Biobank di tanto in tanto.

L'obiettivo di queste misure di sicurezza è garantire che i materiali forniti dalla UK Biobank siano protetti e trattati come se fossero dati personali, con misure appropriate per limitare l'accesso solo agli utenti autorizzati e per proteggere dall'accesso non autorizzato da parte di soggetti interni ed esterni.

1. Politica di sicurezza delle informazioni

- 1.1 Il Collaboratore dovrà implementare e mantenere una politica di sicurezza delle informazioni scritta che specifichi le misure tecniche e organizzative che applicherà per proteggere i Materiali che tratta in conformità con il presente MTA da accessi non autorizzati e/o trattamenti illegali. La politica di sicurezza delle informazioni deve inoltre descrivere le misure da adottare in caso di violazione effettiva o sospetta della sicurezza dei dati.
- 1.2 Il Collaboratore deve nominare una persona debitamente qualificata con la responsabilità di garantire la sicurezza dei Materiali trattati dal Collaboratore nella sua organizzazione e di rivedere, mantenere e aggiornare la politica di sicurezza delle informazioni del Collaboratore.
- 1.3 Il Collaboratore deve assicurarsi che le persone autorizzate che hanno accesso ai Materiali siano consapevoli delle loro responsabilità per i dati che trattano, compresa un'adeguata formazione per adempiere ai loro ruoli.
- 1.4 La politica di sicurezza delle informazioni deve inoltre stabilire che:
 - 1.4.1 Le informazioni devono essere conservate in un ambiente adatto al loro formato e alla loro sensibilità, per garantirne la conservazione da danni fisici o degrado e la sicurezza da accessi non autorizzati;
 - 1.4.2 i dispositivi di archiviazione dei dati sono adeguatamente protetti e l'accesso è controllato; e
 - 1.4.3 i server, i dispositivi client e le applicazioni utilizzati per la conservazione, l'accesso e l'analisi dei materiali della UK Biobank sono mantenuti in modo appropriato con sistemi operativi, firmware e software nelle versioni supportate dal fornitore, laddove le eccezioni sono documentate e le mitigazioni descritte.

2. Accesso ai dati

- 2.1 Il Collaboratore deve implementare controlli di accesso che limitino l'accesso ai dati che tratta a persone debitamente autorizzate e solo nella misura necessaria per lo svolgimento dei loro compiti. L'accesso deve essere controllato con nomi utente e password adeguatamente sicuri, tenendo conto dell'uso di metodi di autenticazione a più fattori. Dovrebbero essere predisposti la registrazione e il monitoraggio degli accessi.
- 2.2 Il Collaboratore deve garantire che le persone autorizzate non condividano o utilizzino lo stesso nome utente; le eccezioni devono essere documentate con adeguate mitigazioni descritte e verificabili.
- 2.3 Il Collaboratore deve identificare e nominare un amministratore debitamente qualificato con la responsabilità di concedere, modificare o annullare i privilegi di accesso ai dati; i privilegi di accesso devono essere rivisti periodicamente.
- 2.4 Nel caso in cui una persona che ha accesso ai materiali lasci o le venga tolta l'autorizzazione (ad esempio in seguito a un cambio di ruolo), il Lead Collaborator deve assicurarsi che il suo stato venga aggiornato entro 24 ore.

3. Memorizzazione e trasmissione dei dati

- 3.1 Ove possibile, i dati devono essere crittografati sempre e durante la trasmissione utilizzando tecniche di crittografia forti; devono essere seguite le migliori pratiche per la gestione delle chiavi.
- 3.2 L'uso di supporti portatili deve essere evitato a meno che non sia ragionevolmente necessario per il trattamento dei dati. Se necessario, i dati devono essere criptati utilizzando una password forte o altre informazioni segrete.
- 3.3 Qualsiasi cancellazione di dati deve essere permanente e i dati cancellati non devono essere recuperabili.
- 3.4 Deve essere mantenuto un registro degli asset informativi in modo che tutti i dati UKB possano essere rimossi su richiesta o al termine del contratto.

Allegato 3

Modello di modulo di conferma annuale

Lo scopo del presente Allegato 3 è quello di fornire al Collaboratore principale un modello del modulo di conferma annuale che dovrà essere compilato e presentato a UK Biobank su base annuale (alla ricorrenza annuale della Data di entrata in vigore). A scanso di equivoci, il Collaboratore principale non è tenuto a compilare questo modulo al momento dell'esecuzione dell'MTA.

La UK Biobank si riserva il diritto di aggiornare periodicamente il presente modulo, comprese le modalità di presentazione. Versioni aggiornate del modulo e delle istruzioni per la presentazione sono accessibili sull'AMS e sul sito web della UK Biobank.

Modulo di conferma annuale del collaboratore

Ogni anno, il collaboratore principale di ogni istituto collaboratore di un progetto di ricerca della Biobanca britannica è tenuto a fornire alcune informazioni sul proprio progetto e a confermare che sta rispettando i termini dell'Accordo di trasferimento di materiale (MTA). Per assistenza, consultare la Guida all'uso di AMS sul sito web di UK Biobank. La mancata presentazione di questo modulo nei tempi previsti (a seguito di solleciti da parte di UK Biobank prima della scadenza) impedirà all'istituto collaboratore di scaricare ulteriori dati e/o di accedere ai dati esistenti tramite il RAP. La possibilità di scaricare ulteriori dati e/o di accedere ai dati esistenti tramite il RAP sarà ripristinata al momento dell'invio della relazione.

Numero del progetto di ricerca:	
Istituzione collaboratrice:	
Data di compilazione del modulo:	

1. Si prega di fornire i nomi di eventuali affiliati⁶ che hanno accesso ai dati della UK Biobank per questo progetto di ricerca. Se non ce ne sono, si prega di specificarlo:

Affiliati:

2. Si prega di fornire i nomi di eventuali Responsabili del trattamento di terze parti che trattano i dati della UK Biobank in qualità di subappaltatori per questo progetto di ricerca e di fornire dettagli sulle attività che il Responsabile del trattamento svolge per vostro conto. In caso contrario, si prega di specificarlo:

Processori di terze parti:
Compiti del processore di terze parti:

3. Confermo che:

-

Contrassegnare con una "x":

- Sono il Lead Collaborator dell'Istituto collaboratore e del Progetto di ricerca sopra indicato;
- La ricerca condotta dall'istituto collaboratore rientra nei parametri dell'ambito approvato del progetto di ricerca e l'avanzamento della ricerca è coerente con l'aggiornamento del progetto del PI del richiedente; e
- Le disposizioni del/dei Contratto/i di Trasferimento di Materiale (compresi eventuali modifiche e aggiornamenti applicabili) e degli Allegati sono rispettate.

6 Per Affiliato si intende qualsiasi società o altra entità che direttamente o indirettamente controlla, è controllata da o è sottoposta a controllo comune con un Collaboratore (il che include, se tale Collaboratore è una società, una società controllata o controllante o una holding di tale Collaboratore, o una società controllata di tale controllante o holding) per tutto il tempo in cui esiste tale controllo. Per ulteriori informazioni si rimanda alla definizione di "controllo" contenuta nell'MTA.

Allegato 4

Progetto di Ricerca Approvato

Numero di riferimento del progetto (Application) approvato: 69098

Nome del progetto (Application) approvato: The Relationship Between Normal Blood Pressure Values, Serum Uric Acid and Cardiovascular and Metabolic Phenotypes

I dettagli del progetto di ricerca approvato (compresi l'ambito del progetto, la tempistica, i materiali (insieme a eventuali condizioni specifiche), i costi di accesso e i collaboratori sono disponibili qui: [Dettagli del progetto approvato](#)

Richieste di modifica

Le seguenti richieste possono essere effettuate tramite il sistema di gestione degli accessi della UK Biobank (AMS) e sono soggette a revisione e approvazione (e, se del caso, a costi di accesso aggiuntivi):

- Richieste di estensione dell'ambito del progetto
- Richieste di estensione della durata del progetto
- Richieste di aggiungere ulteriori dati al progetto di ricerca approvato.

UK Biobank faciliterà anche le seguenti modifiche al progetto di ricerca approvato, qualora ciò sia richiesto dal richiedente:

- Aggiungere altri collaboratori al progetto di ricerca approvato (soggetto alla tariffa di accesso applicabile).
- Modifiche al PI richiedente del progetto di ricerca approvato

Summary de-identification protocol V2

1. Introduction

- 1.1 This note sets out the UK Biobank policy for the de-identification of participant data (*Participants and Participant Data*) prior to its release to researchers. At the outset, two clear distinctions should be made:
- 1.1.1 This note **does not** specifically address the simple fact of an individual being identified as a Participant in UK Biobank, as many Participants choose (quite reasonably) to volunteer this information about themselves. However, UK Biobank does not itself release the identity or confirm the identity of any Participant.
- 1.1.2 This note **does** specifically address the release of Participant Data by UK Biobank to researchers where the manner in which the Participant Data is released could inadvertently identify a Participant (bearing in mind other information about the Participant which may already be in the public domain).
- 1.2 To illustrate: the fact that *Mr Jones* is a participant in UK Biobank is significant but not, of itself, an overtly significant item of information. Nevertheless, releasing information about the state of Mr Jones health to researchers in such a way that a) Mr Jones is (or can be) identified and then b) cross-referenced directly to the UK Biobank phenotypical or genotypical information which UK Biobank holds on him, would be highly problematic. The purpose of this note is to set out the steps that UK Biobank takes to, as far as UK Biobank possibly can, ensure that this does not happen.
- 1.3 This note also sets out certain details about the nature of the Participant Data which UK Biobank holds on Participants, UK Biobank's legal obligations, considerations around health-record linkage, practical considerations about identification and finally the actual de-identification protocols.

2. Background

Identifiable Participant Data

- 2.1 The Participant Data that UK Biobank holds includes the following identifiable data on each Participant (*Identifiable Participant Data*): name, address, email, mobile phone number, NHS number. This Identifiable Participant Data is **not** released to researchers¹.
- 2.2 This Identifiable Participant Data (the minimum amount required) is only released to third parties where strictly necessary and always subject to a compliant legal agreement: for example, where UK Biobank needs to send a COVID-19 testing kit or its newsletter to participants it has to provide a suitable mailing list (with names and addresses) to the distribution centre.
- 2.3 Within UK Biobank, this identifiable data is stored and encrypted and only accessible by a very small number of UK Biobank personnel who **need** to access it.

De-identified Participant Data

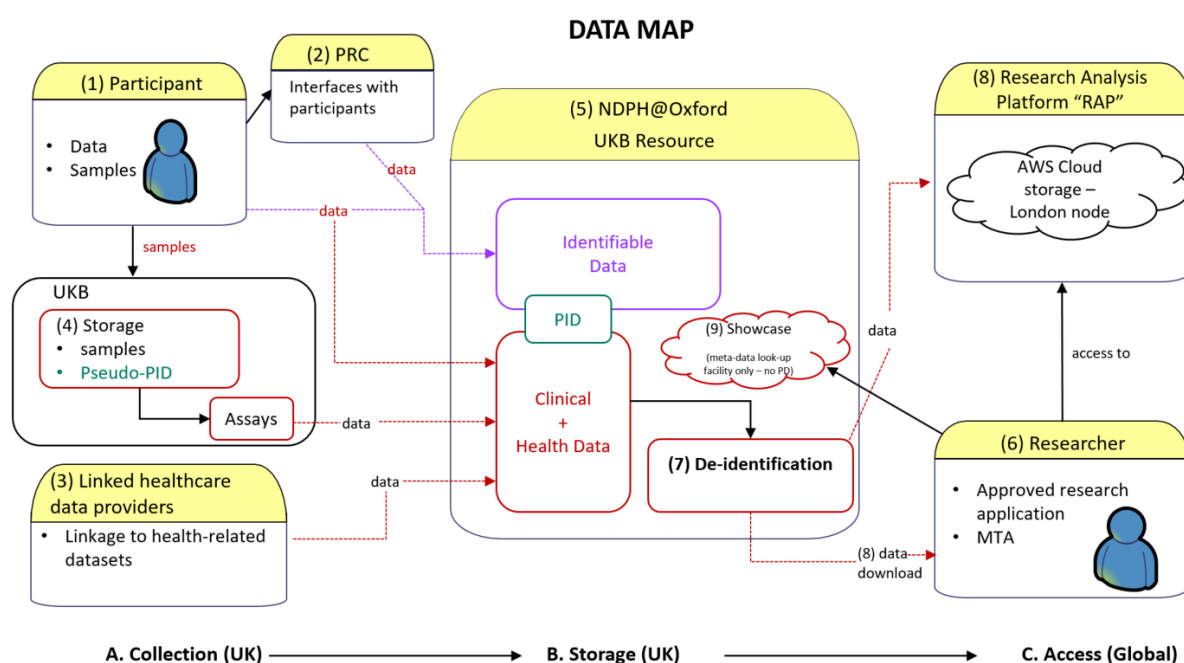
- 2.4 All the other Participant Data that UK Biobank holds, which includes the detailed research data on each Participant is stored in a de-identified manner (*De-identified Participant Data*), is categorised below:
- 2.4.1 measures of the Participant's phenotype, such as height, weight and blood pressure (approximately 2,000 phenotypes per Participant, as further detailed here <http://biobank.ndph.ox.ac.uk/showcase/schema.cgi?id=1>);

¹ Please also see section 6.5 below.

- 2.4.2 measures of the Participant's genome, this includes genotype, exome sequence and whole sequence data;
- 2.4.3 biomarkers created by assay of the Participant's samples, which include common biomarkers (such as cholesterol), infectious disease markers, proteomic and metabolomic markers;
- 2.4.4 imaging data (on up to 100,000 Participants) as the result of MRI scans of the head, the heart and the body, plus ultrasound and DEXA; and
- 2.4.5 data derived from health record linkages including hospital records, primary care records, death and cancer registries or any other sources of clinical data; and
- 2.4.6 other special category data derived from baseline/online questionnaire responses and interviews, such as past illness / disease history, dietary, cognitive and physical measures

Data Storage and PIDs

- 2.5 The UK Biobank IT systems store the Identifiable Participant Data – see diagram below – separately from the main databases where the De-identified Participant Data is stored. Further, each participant is assigned a unique identifier known as a PID, which is randomly generated from the participant's NHS number and cannot be reverse engineered by third parties. The PID is stored with both the Identifiable Participant Data and with the De-identified Participant Data and acts as the "primary-key" to link the information together.



3. UK Biobank's legal obligations

- 3.1 As part of the consent process, UK Biobank explicitly undertook to (a) preserve the anonymity of its Participants and more critically (b) not to release data about Participants in such a way that Participants can be identified. These undertakings apply to both living and deceased Participants.
- 3.2 UK Biobank legal obligations mirror these undertakings provided to Participants during the consent process. These legal obligations are as follows:

- 3.2.1 UK Biobank owes an obligation of confidentiality to the Participants not to identify them. There are no de facto privacy issues (under the Human Rights Act) as "privacy" as a legal concept only applies to identifiable individuals; and
- 3.2.2 UK Biobank owes certain duties to participants under the GDPR, which are set out in more detail here <https://www.ukbiobank.ac.uk/explore-your-participation/basis-of-your-participation> ².
- 3.3 UK Biobank ensures that researchers comply with these obligations relating to Participant Data – bearing in mind that only De-identified Participant Data is ever released - through the mechanism of its Material Transfer Agreement (MTA). The MTA has recently been revised and updated to take into account changes in practice and regulation <https://www.ukbiobank.ac.uk/media/5cclro0y/applicant-mta-data-only-2021.pdf>.
- 3.4 The De-identified Participant Data is only released to researchers (whose application has been approved by UK Biobank) who agree to enter into UK Biobank's MTA, which sets out in detail what researchers are entitled to do with the De-identified Participant Data. The MTA also contains specific provisions prohibiting researchers from trying to take any steps to pro-actively identify or contact Participants.
- 4. **Health record linkage**
 - 4.1 As a prospective resource, UK Biobank follows up Participants through the health records (primary care, secondary care and others): it has explicit consent to do this <https://www.ukbiobank.ac.uk/media/05ldg1ez/consent-form-uk-biobank.pdf>.
 - 4.2 These health record linkage arrangements are always covered by a specific agreement with the relevant counterparty (such as NHS Digital) and UK Biobank has a policy of seeking to conduct, wherever possible, the linkage such that Participants are not re-identified during the course of the linkage.
- 5. **Practical considerations**
 - 5.1 To recap, as UK Biobank has an obligation to provide De-identified Participant Data to researchers in a manner which (a) preserves the anonymity of its Participants and (b) as far as practically possible does not enable Participants to be inadvertently identified.
 - 5.2 There are certain items of information within the Participant Data, which have varying degrees of potential to identify a Participant (either alone or in combination). These direct identifiers are removed from the Participant Data and these include date of birth; gender; name of GP; ethnicity; postcode; certain specific event instances (such as admission of a participant to a particular hospital); potentially identifying codes (such as rare occupation) and unedited free text fields in linkage health-record data relating to the Participant.
 - 5.3 These items vary in their potential to identify Participants, with unedited free text fields and detailed post code being the most powerful. In combination, certain of these items (for example post code, gender and date of birth) can serve to significantly increase the risk of re-identification.
 - 5.4 In terms of the NHS number, which is stored by UK Biobank as an encrypted PID, each dataset released to a researcher contains project-specific encrypted identifier (EID) to replace the PID. An EID is a number algorithmically generated by UKB specifically for that particular research application. The link between a) the NHS number and the PID and in turn b) the PID and the EID is securely stored by UK Biobank.
 - 5.5 There are also certain data items which are inherently unique to a Participant – for example genetic sequence data. However, the re-identification risk posed by this type of data is in practice relatively small. Using the sequence data as an example, a researcher in possession of sequence data (or a collection of SNPs or tandem repeats) would have to possess (a) another comparable genetic sequence of the

² UK Biobank is not subject to the Freedom of Information Act 2000 and comparable upcoming legislation (as it is not a public body).

Participant from a source which identified the Participant as well as holding the genetic sequence of the Participant from UK Biobank and (b) the computing systems to match the two sequences. This is technically possible, but the actual risk of re-identification is *in practice* relatively small.

- 5.6 UK Biobank is conscious that technology in this area moves at a considerable speed and is particularly conscious that there are certain open access resources (particularly those used for generating ancestral trees from genetic data) where individuals can upload their own genotype or sequences. Actions such as this do serve to increase the possibility of re-identification and in this regard further guidance to Participants is under consideration.

6. **UK Biobank's protocol**

- 6.1 Participant Data will always be released to researchers with distinct encrypted random numbers. In other words, each set of Participant Data relating to an individual Participant is identified by an encrypted random number which has been generated specifically for each application: this is the EID which is generated from the PID).

- 6.3 Further, UK Biobank does not release:

- 6.3.1 potentially directly identifiable information such as full DOB and instead releases just month and year of birth, any scanned images which contain identifiable facial images and any unedited free text fields from health-records (as these could contain identifiable references to the participant or other individuals); and/or
- 6.3.4 potentially indirectly identifiable information such as detailed post codes, where UK Biobank's default position is to only provide details of an address (based on grid references or postcodes) to 1km accuracy (equivalent to the last 3 digits of a postcode being removed).

- 6.4 Where researchers wish to use data fields which contain more potentially identifiable information for an approved research purpose, this is considered by UK Biobank on a case-by-case basis, and appropriate methods are adopted to protect participant anonymity.

- 6.5 By way of example, if a researcher requested detailed address data for the purposes of linkage to an environmental dataset (e.g., air pollution estimates), UK Biobank will release the data in a phased manner such that is not possible to link the address data with any other data-field. Hence, the address data is released first with one set of EIDs, and only once the linked data is returned to UKB do the researchers receive the full dataset (excluding address data) with a different set of EIDs.

- 6.6 UK Biobank would make two final caveats about this de-identification protocol:

- 6.6.1 it is not a fail-safe guarantee of continuing anonymity; and
- 6.6.2 it is kept under regular review and updated periodically, in order to take into account of technological and other changes which could increase the ability of third parties to identify participants.

UK Biobank / June 2021

Path

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Population characteristics > Baseline characteristics
Population characteristics > Baseline characteristics
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Bone-densitometry of heel
Assessment Centre > Physical measures > Hand grip strength
Assessment Centre > Physical measures > Hand grip strength
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Population characteristics > Baseline characteristics
Assessment Centre > Recruitment > Reception
Assessment Centre > Recruitment > Reception
Assessment Centre > Recruitment > Reception
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Population characteristics > Ongoing characteristics
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Sleep
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Alcohol
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Sociodemographics > Ethnicity
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Alcohol
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Blood pressure
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness

Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Intraocular pressure
Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Intraocular pressure
Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography
Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound
Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness
Assessment Centre > Touchscreen > Family history
Assessment Centre > Touchscreen > Family history
Assessment Centre > Touchscreen > Family history
Assessment Centre > Verbal interview > Early life factors
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Alcohol
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Smoking
Assessment Centre > Imaging > Abdominal MRI
Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Heart MRI
Assessment Centre > Imaging > Brain MRI > Diffusion brain MRI
Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound
Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound
Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound
Assessment Centre > Imaging > Brain MRI > Diffusion brain MRI
Assessment Centre > Imaging > Brain MRI > T1 structural brain MRI
Assessment Centre > Touchscreen > Sociodemographics > Ethnicity
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures
Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body size measures

Assessment Centre > Recruitment > Reception

Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography

Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography

Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography

Assessment Centre > Physical measures > Eye measures > Retinal optical coherence tomography

Assessment Centre > Physical measures > Arterial stiffness

Population characteristics > Baseline characteristics

Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity > MET Scores

Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity > MET Scores

Assessment Centre > Touchscreen > Lifestyle and environment > Physical activity > MET Scores

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Physical measures > ECG at rest, 12-lead

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Imaging > Heart MRI > Left ventricular size and function

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Carotid ultrasound

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Assessment Centre > Physical measures > Anthropometry > Body composition by impedance

Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry > Blood biochemistry processing
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Biological samples > Blood assays > Blood biochemistry
Health-related outcomes > Death register
Health-related outcomes > Death register
Health-related outcomes > Death register
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Hot/cold beverages yesterday
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Hot/cold beverages yesterday
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Alcoholic beverages yesterday
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Physical activity yesterday
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Physical activity yesterday
Online follow-up > Diet by 24-hour recall > Physical activity yesterday

Category	FieldID	Field
	100010	21 Weight method
	100094	31 Sex
	100094	34 Year of birth
	100011	36 Blood pressure device ID
	100011	37 Blood pressure manual sphygmomanometer device ID
	100010	39 Height measure device ID
	100010	40 Manual scales device ID
	100010	41 Seating box device ID
	100009	43 Impedance device ID
	100010	44 Tape measure device ID
	100018	45 Heel ultrasound device id
	100019	46 Hand grip strength (left)
	100019	47 Hand grip strength (right)
	100010	48 Waist circumference
	100010	49 Hip circumference
	100010	50 Standing height
	100010	51 Seated height
	100094	52 Month of birth
	100024	53 Date of attending assessment centre
	100024	54 UK Biobank assessment centre
	100024	55 Month of attending assessment centre
	100011	93 Systolic blood pressure, manual reading
	100011	94 Diastolic blood pressure, manual reading
	100011	95 Pulse rate (during blood-pressure measurement)
	100011	96 Time since interview start at which blood pressure screen(s) shown
	100011	102 Pulse rate, automated reading
	2	191 Date lost to follow-up
	100054	874 Duration of walks
	100054	894 Duration of moderate activity
	100054	914 Duration of vigorous activity
	100057	1160 Sleep duration
	100058	1239 Current tobacco smoking
	100058	1249 Past tobacco smoking
	100051	1558 Alcohol intake frequency.
	100010	3077 Seating box height
	100010	3160 Weight, manual entry
	100058	3436 Age started smoking in current smokers
	100065	3659 Year immigrated to UK (United Kingdom)
	100051	3731 Former alcohol drinker
	100011	4079 Diastolic blood pressure, automated reading
	100011	4080 Systolic blood pressure, automated reading
	100011	4081 Method of measuring blood pressure
	100007	4136 Arterial pulse-wave stiffness device ID
	100007	4186 Stiffness method
	100007	4194 Pulse rate
	100007	4195 Pulse wave reflection index
	100007	4196 Pulse wave peak to peak time
	100007	4198 Position of the pulse wave peak
	100007	4199 Position of pulse wave notch
	100007	4200 Position of the shoulder on the pulse waveform
	100007	4204 Absence of notch position in the pulse waveform
	100007	4205 Pulse wave pressure versus time response curve

100007	4206 Arterial stiffness device ID
100007	4207 Pulse wave velocity (manual entry)
100015	5194 Intra-ocular pressure (IOP) method (right)
100015	5196 Intra-ocular pressure (IOP) method (left)
100016	6070 OCT measured (right)
100016	6072 OCT measured (left)
100009	6218 Impedance of whole body, manual entry
100009	6219 Impedance of leg, manual entry (right)
100009	6220 Impedance of leg, manual entry (left)
100009	6221 Impedance of arm, manual entry (right)
100009	6222 Impedance of arm, manual entry (left)
100010	12143 Weight (pre-imaging)
100010	12144 Height
101	12291 Carotid ultrasound measuring method
101	12292 Carotid ultrasound measurement completed
104	12323 12-lead ECG measuring method
104	12336 Ventricular rate
104	12338 P duration
104	12340 QRS duration
104	12653 ECG automated diagnoses
104	12654 Number of automated diagnostic comments recorded during 12-lead ECG
104	12657 Suspicious flag for 12-lead ECG
104	12658 Identifier for 12-lead ECG device
100010	20015 Sitting height
100007	20051 Reason for skipping arterial stiffness
100034	20107 Illnesses of father
100034	20110 Illnesses of mother
100034	20111 Illnesses of siblings
100072	20115 Country of Birth (non-UK origin)
100058	20116 Smoking status
100051	20117 Alcohol drinker status
100058	20160 Ever smoked
100058	20161 Pack years of smoking
100058	20162 Pack years adult smoking as proportion of life span exposed to smoking
105	20201 Dixon technique for internal fat - DICOM
104	20205 ECG datasets
102	20207 Scout images for heart MRI - DICOM
102	20208 Long axis heart images - DICOM
102	20209 Short axis heart images - DICOM
102	20210 Aortic distensibility images - DICOM
102	20211 Cine tagging images - DICOM
102	20212 Left ventricular outflow tract images - DICOM
102	20213 Blood flow images - DICOM
102	20214 Experimental shMOLLI sequence images - DICOM
107	20218 Multiband diffusion brain images - DICOM
101	20222 Carotid artery ultrasound image (left)
101	20223 Carotid artery ultrasound image (right)
101	20226 Carotid artery ultrasound report
107	20250 Multiband diffusion brain images - NIFTI
110	20252 T1 structural brain images - NIFTI
100065	21000 Ethnic background
100010	21001 Body mass index (BMI)
100010	21002 Weight

100024	21003 Age when attended assessment centre
100016	21015 Fundus retinal eye image (left)
100016	21016 Fundus retinal eye image (right)
100016	21017 OCT image slices (left)
100016	21018 OCT image slices (right)
100007	21021 Pulse wave Arterial Stiffness index
100094	21022 Age at recruitment
54	22032 IPAQ activity group
54	22035 Above moderate/vigorous recommendation
54	22036 Above moderate/vigorous/walking recommendation
104	22330 PQ interval
104	22331 QT interval
104	22332 QTC interval
104	22333 RR interval
104	22334 PP interval
104	22335 P axis
104	22336 R axis
104	22337 T axis
104	22338 QRS num
133	22420 LV ejection fraction
133	22421 LV end diastolic volume
133	22422 LV end systolic volume
133	22423 LV stroke volume
133	22424 Cardiac output
133	22425 Cardiac index
133	22426 Average heart rate
133	22427 Body surface area
101	22670 Minimum carotid IMT (intima-medial thickness) at 120 degrees
101	22671 Mean carotid IMT (intima-medial thickness) at 120 degrees
101	22672 Maximum carotid IMT (intima-medial thickness) at 120 degrees
101	22673 Minimum carotid IMT (intima-medial thickness) at 150 degrees
101	22674 Mean carotid IMT (intima-medial thickness) at 150 degrees
101	22675 Maximum carotid IMT (intima-medial thickness) at 150 degrees
100009	23098 Weight
100009	23099 Body fat percentage
100009	23100 Whole body fat mass
100009	23101 Whole body fat-free mass
100009	23102 Whole body water mass
100009	23104 Body mass index (BMI)
100009	23105 Basal metabolic rate
100009	23106 Impedance of whole body
100009	23107 Impedance of leg (right)
100009	23108 Impedance of leg (left)
100009	23109 Impedance of arm (right)
100009	23110 Impedance of arm (left)
100009	23111 Leg fat percentage (right)
100009	23112 Leg fat mass (right)
100009	23113 Leg fat-free mass (right)
100009	23114 Leg predicted mass (right)
100009	23115 Leg fat percentage (left)
100009	23116 Leg fat mass (left)
100009	23117 Leg fat-free mass (left)
100009	23118 Leg predicted mass (left)

100009	23119 Arm fat percentage (right)
100009	23120 Arm fat mass (right)
100009	23121 Arm fat-free mass (right)
100009	23122 Arm predicted mass (right)
100009	23123 Arm fat percentage (left)
100009	23124 Arm fat mass (left)
100009	23125 Arm fat-free mass (left)
100009	23126 Arm predicted mass (left)
100009	23127 Trunk fat percentage
100009	23128 Trunk fat mass
100009	23129 Trunk fat-free mass
100009	23130 Trunk predicted mass
100081	30000 White blood cell (leukocyte) count
100081	30010 Red blood cell (erythrocyte) count
100081	30020 Haemoglobin concentration
100081	30030 Haematocrit percentage
100081	30070 Red blood cell (erythrocyte) distribution width
100081	30080 Platelet count
100081	30120 Lymphocyte count
100081	30130 Monocyte count
100081	30140 Neutrophill count
100081	30150 Eosinophill count
100081	30160 Basophill count
100081	30170 Nucleated red blood cell count
100081	30180 Lymphocyte percentage
100081	30190 Monocyte percentage
100081	30200 Neutrophill percentage
100081	30210 Eosinophill percentage
100081	30220 Basophill percentage
100081	30230 Nucleated red blood cell percentage
100081	30240 Reticulocyte percentage
100081	30250 Reticulocyte count
100083	30500 Microalbumin in urine
100083	30505 Microalbumin in urine result flag
100083	30510 Creatinine (enzymatic) in urine
100083	30515 Creatinine (enzymatic) in urine result flag
100083	30520 Potassium in urine
100083	30525 Potassium in urine result flag
100083	30530 Sodium in urine
100083	30535 Sodium in urine result flag
17518	30600 Albumin
17518	30610 Alkaline phosphatase
17518	30620 Alanine aminotransferase
17518	30630 Apolipoprotein A
17518	30640 Apolipoprotein B
17518	30650 Aspartate aminotransferase
17518	30660 Direct bilirubin
17518	30670 Urea
17518	30680 Calcium
17518	30690 Cholesterol
17518	30700 Creatinine
17518	30710 C-reactive protein
17518	30720 Cystatin C

18518	30721 Cystatin C assay date
17518	30740 Glucose
17518	30750 Glycated haemoglobin (HbA1c)
17518	30760 HDL cholesterol
17518	30780 LDL direct
17518	30790 Lipoprotein A
17518	30810 Phosphate
17518	30860 Total protein
17518	30870 Triglycerides
17518	30880 Urate
100093	40000 Date of death
100093	40001 Underlying (primary) cause of death: ICD10
100093	40007 Age at death
100104	100150 Drinking water intake
100104	100240 Coffee consumed
100100	100580 Alcohol consumed
100108	104900 Time spent doing vigorous physical activity
100108	104910 Time spent doing moderate physical activity
100108	104920 Time spent doing light physical activity

Participants	Items	Stability	ValueType	Units	ItemType	Strata	Sexed
500795	573068	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
502460	502460	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
502460	502460	Complete	Integer	years	Data	Primary	Unisex
498712	565663	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
498712	565663	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
497933	569323	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
499224	571028	Complete	Integer	Kg	Data	Primary	Unisex
499296	571112	Complete	Integer	Kg	Data	Primary	Unisex
500362	572604	Complete	Continuous	cm	Data	Primary	Unisex
500300	572542	Complete	Continuous	cm	Data	Primary	Unisex
499999	572176	Complete	Continuous	cm	Data	Primary	Unisex
497138	568275	Complete	Continuous	cm	Data	Primary	Unisex
502460	502460	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
502460	576301	Complete	Date		Data	Primary	Unisex
502460	576296	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
502460	576301	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
48873	81116	Complete	Integer	mmHg	Data	Primary	Unisex
48873	81116	Complete	Integer	mmHg	Data	Primary	Unisex
48873	81116	Complete	Integer		Data	Primary	Unisex
501611	1138167	Complete	Integer	seconds	Data	Auxiliary	Unisex
475160	1055688	Complete	Integer	bpm	Data	Primary	Unisex
1298	1298	Ongoing	Date		Data	Primary	Unisex
480068	549796	Complete	Integer	minutes/day	Data	Primary	Unisex
418110	476681	Complete	Integer	minutes/day	Data	Primary	Unisex
304668	343832	Complete	Integer	minutes/day	Data	Primary	Unisex
501590	575022	Complete	Integer	hours/day	Data	Primary	Unisex
501586	575018	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
463704	534067	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
501580	575012	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
497138	568275	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
8627	8733	Complete	Continuous	Kg	Data	Primary	Unisex
39518	40951	Complete	Integer	years	Data	Primary	Unisex
44556	46079	Complete	Integer		Data	Primary	Unisex
42331	45544	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
475160	1055688	Complete	Integer	mmHg	Data	Primary	Unisex
475155	1055658	Complete	Integer	mmHg	Data	Primary	Unisex
501611	1138167	Complete	Categorical single		Data	Auxiliary	Unisex
213273	244572	Complete	Text		Data	Auxiliary	Unisex
211130	240622	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
208064	236324	Complete	Integer	bpm	Data	Primary	Unisex
208064	236324	Complete	Integer		Data	Primary	Unisex
207949	236178	Complete	Integer	milliseconds	Data	Primary	Unisex
208064	236324	Complete	Integer		Data	Auxiliary	Unisex
208064	236324	Complete	Integer		Data	Auxiliary	Unisex
208064	236324	Complete	Integer		Data	Auxiliary	Unisex
208064	236324	Complete	Categorical single		Data	Auxiliary	Unisex
207987	235657	Complete	Compound		Data	Primary	Unisex

211130	240622	Complete Text		Data	Auxiliary	Unisex
437	437	Complete Continuous	m/s	Data	Primary	Unisex
132126	136291	Complete Categorical single		Data	Primary	Unisex
132120	136286	Complete Categorical single		Data	Primary	Unisex
95933	98836	Complete Categorical single		Data	Primary	Unisex
95938	98842	Complete Categorical single		Data	Primary	Unisex
31	31	Complete Integer	ohm	Data	Supporting	Unisex
31	31	Complete Integer	ohm	Data	Supporting	Unisex
31	31	Complete Integer	ohm	Data	Supporting	Unisex
31	31	Complete Integer	ohm	Data	Supporting	Unisex
31	31	Complete Integer	ohm	Data	Supporting	Unisex
48986	53484	Accruing Integer	Kg	Data	Primary	Unisex
48986	53484	Accruing Integer	cm	Data	Primary	Unisex
48792	53254	Accruing Categorical single		Data	Primary	Unisex
48010	52378	Accruing Categorical single		Data	Primary	Unisex
48675	53012	Accruing Categorical single		Data	Primary	Unisex
42848	46094	Accruing Integer	bpm	Data	Primary	Unisex
40648	43703	Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
42841	46085	Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
42500	257718	Accruing Text		Data	Primary	Unisex
42500	45468	Accruing Integer		Data	Primary	Unisex
1876	1876	Accruing Integer		Data	Auxiliary	Unisex
48644	52981	Accruing Text		Data	Primary	Unisex
497138	568275	Complete Continuous	cm	Data	Derived	Unisex
931	931	Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
488051	1242698	Complete Categorical multiple		Data	Primary	Unisex
492957	1251925	Complete Categorical multiple		Data	Primary	Unisex
434150	1062444	Complete Categorical multiple		Data	Primary	Unisex
40571	40571	Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
501586	575018	Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
501580	575012	Accruing Categorical single		Data	Derived	Unisex
499702	572112	Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
152637	168734	Complete Continuous	years	Data	Derived	Unisex
152637	168734	Complete Continuous	Units	Data	Derived	Unisex
44857	48687	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
42793	45612	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
45751	49653	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
45656	49553	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
45505	49374	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43427	47109	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43256	46924	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43375	47049	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43148	46792	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43422	47086	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
43949	48228	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
19365	21088	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
19367	21090	Accruing Text		Bulk	Primary	Unisex
19367	21091	Accruing Text		Bulk	Supporting	Unisex
42518	46075	Accruing Text		Bulk	Derived	Unisex
44183	47772	Accruing Text		Bulk	Derived	Unisex
501568	533565	Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
499462	571494	Complete Continuous	Kg/m2	Data	Derived	Unisex
499777	571873	Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex

502460	576301 Complete Integer	years	Data	Derived	Unisex
84748	87550 Complete Text		Bulk	Derived	Unisex
85227	88246 Complete Text		Bulk	Derived	Unisex
84781	87583 Complete Text		Bulk	Primary	Unisex
85250	88269 Complete Text		Bulk	Primary	Unisex
206956	234968 Complete Continuous		Data	Derived	Unisex
502460	502460 Complete Integer	years	Data	Derived	Unisex
402349	402349 Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
402349	402349 Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
402237	402237 Complete Categorical single		Data	Derived	Unisex
23677	23677 Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	ms	Data	Primary	Unisex
23720	23720 Accruing Integer	degrees	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	degrees	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	degrees	Data	Primary	Unisex
24922	24922 Accruing Integer	units	Data	Primary	Unisex
39703	40606 Accruing Integer	percent	Data	Derived	Unisex
39703	40606 Accruing Integer	mL	Data	Derived	Unisex
39703	40606 Accruing Integer	mL	Data	Derived	Unisex
39703	40606 Accruing Integer	mL	Data	Derived	Unisex
39703	40606 Accruing Continuous	litres/min	Data	Derived	Unisex
39696	40599 Accruing Continuous	litres/min/m2	Data	Derived	Unisex
39703	40606 Accruing Integer	bpm	Data	Primary	Unisex
39696	40599 Accruing Continuous	m2	Data	Primary	Unisex
46721	50093 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
46721	50093 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
46721	50093 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
46924	50315 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
46924	50315 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
46924	50315 Accruing Continuous	micrometres	Data	Primary	Unisex
493050	563140 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492797	562837 Complete Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
492267	562228 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
493003	563088 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
493047	563135 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
493044	563132 Complete Continuous	Kg/m2	Data	Derived	Unisex
493034	563121 Complete Continuous	KJ	Data	Derived	Unisex
492996	563076 Complete Continuous	ohms	Data	Derived	Unisex
493023	563110 Complete Continuous	ohms	Data	Derived	Unisex
493019	563104 Complete Continuous	ohms	Data	Derived	Unisex
492990	563072 Complete Continuous	ohms	Data	Derived	Unisex
493012	563096 Complete Continuous	ohms	Data	Derived	Unisex
493016	563101 Complete Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
493008	563092 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492999	563080 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492998	563079 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492989	563069 Complete Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
492984	563064 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492971	563045 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492965	563039 Complete Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex

492955	563027	Complete	Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
492923	562992	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492924	562989	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492916	562981	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492895	562958	Complete	Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
492857	562914	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492842	562900	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492825	562881	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492796	562838	Complete	Continuous	percent	Data	Derived	Unisex
492774	562811	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492704	562727	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
492663	562672	Complete	Continuous	Kg	Data	Derived	Unisex
479305	503400	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
479310	503404	Complete	Continuous	10^12 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
479309	503406	Complete	Continuous	grams/decilitre	Data	Primary	Unisex
479310	503406	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
479309	503404	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
479306	503403	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478442	502498	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478442	502498	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478442	502498	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478442	502498	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478442	502498	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478216	496808	Complete	Continuous	10^9 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
478447	502505	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
478447	502505	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
478447	502505	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
478447	502505	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
478447	502505	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
478212	496804	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
471258	494671	Complete	Continuous	percent	Data	Primary	Unisex
471258	494672	Complete	Continuous	10^12 cells/Litre	Data	Primary	Unisex
156587	159392	Accruing	Continuous	mg/L	Data	Primary	Unisex
334016	344187	Accruing	Categorical single		Data	Primary	Unisex
484916	503600	Accruing	Continuous	micromole/L	Data	Primary	Unisex
4	4	Accruing	Categorical single		Data	Primary	Unisex
483931	502548	Accruing	Continuous	millimole/L	Data	Primary	Unisex
1049	1050	Accruing	Categorical single		Data	Primary	Unisex
483901	502530	Accruing	Continuous	millimole/L	Data	Primary	Unisex
1062	1066	Accruing	Categorical single		Data	Primary	Unisex
432299	445731	Accruing	Continuous	g/L	Data	Primary	Unisex
470817	487431	Accruing	Continuous	U/L	Data	Primary	Unisex
470616	487224	Accruing	Continuous	U/L	Data	Primary	Unisex
429752	443040	Accruing	Continuous	g/L	Data	Primary	Unisex
468472	484956	Accruing	Continuous	g/L	Data	Primary	Unisex
469067	485560	Accruing	Continuous	U/L	Data	Primary	Unisex
400990	413624	Accruing	Continuous	umol/L	Data	Primary	Unisex
470496	487081	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
432151	445580	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
470804	487425	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
470581	487159	Accruing	Continuous	umol/L	Data	Primary	Unisex
469815	486364	Accruing	Continuous	mg/L	Data	Primary	Unisex
470775	487381	Accruing	Continuous	mg/L	Data	Primary	Unisex

474692	492067	Accruing	Date		Data	Auxiliary	Unisex
431805	445214	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
467869	480730	Accruing	Continuous	mmol/mol	Data	Primary	Unisex
432096	445524	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
469966	486502	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
377628	389830	Accruing	Continuous	nmol/L	Data	Primary	Unisex
431486	444862	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
431832	445250	Accruing	Continuous	g/L	Data	Primary	Unisex
470434	487017	Accruing	Continuous	mmol/L	Data	Primary	Unisex
470255	486813	Accruing	Continuous	umol/L	Data	Primary	Unisex
35036	35096	Accruing	Date		Data	Primary	Unisex
34915	34975	Accruing	Categorical single		Data	Primary	Unisex
35036	35096	Accruing	Continuous	years	Data	Derived	Unisex
186958	377513	Complete	Categorical single	Glass/Beaker	Data	Primary	Unisex
210985	458539	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
210985	458539	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
210985	458539	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
210985	458539	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex
210985	458539	Complete	Categorical single		Data	Primary	Unisex

Instances	Array	Coding
4	1	100261
1	1	9
1	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
1	1	8
4	1	
4	1	10
4	1	8
4	2	
4	2	
4	2	
4	2	
4	2	
1	1	
4	1	100291
4	1	100291
4	1	100291
4	1	100291
4	1	100347
4	1	100348
4	1	100402
4	1	100262
4	1	
4	1	100291
3	1	100291
4	1	100352
4	2	
4	2	
4	2	100259
4	1	
4	1	100263
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	
4	1	12
4	1	

4	1		
4	1		
2	1	100274	
2	1	100274	
2	1	100274	
2	1	100274	
3	1		
3	1		
3	1		
3	1		
3	1		
2	1		
2	1		
2	1	470	
2	1	7	
2	1	470	
2	1		
2	1		
2	1		
2	15		
2	1		
1	1		
2	1		
4	1		
1	1	51	
4	10	1010	
4	11	1010	
4	12	1010	
1	1	89	
4	1	90	
4	1	90	
4	1	7	
4	1		
4	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
2	1		
3	1	1001	
4	1		
4	1		

[illegible]

[illegible]

053_prop-002110740-UNAQISI-7f77531d-3331-4b5d-a718-02d0a6a4de7f_1668606880783

2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	
2	1	19
2	1	
5	1	100006
5	1	100010
5	1	100010
5	1	100011
5	1	100011
5	1	100012

Notes

Indicates whether weight was entered into the machine directly or manually, whether weight was only measured manually

Sex of participant. Acquired from central registry at recruitment, but in some cases updated by the participant. Hence this

Year of birth of participant. Acquired from central registry, updated by participant.

Blood pressure (Omron) gadget ID

Blood pressure manual sphygmomanometer gadget ID

Height measure gadget id

Manual scales gadget id

Sitting box gadget id

Impedance (Tanita) gadget id

Tape measure gadget id

Ultrasound heel (Sahara) gadget ID

Left grip strength

Right grip strength

Waist circumference

Hip circumference

Standing height was measured using a Seca 202 device

Seated height was measured using a Seca 202 device with the participant seated on a box, the size of which is given by F

Calendar month of birth of participant. Acquired from central registry, updated by participant.

Date that participant attended a UK Biobank assessment centre. Automatically acquired at Reception stage.

The UK Biobank assessment centre at which participant consented. Automatically acquired at participant consent

Calendar month that participant attended a UK Biobank assessment centre. Automatically acquired at Reception stage.

Blood pressure, manual reading, systolic. Two measures of blood pressure were taken a few moments apart. A manual s

Blood pressure, manual reading, diastolic. Two measures of blood pressure were taken a few moments apart. A manual s

Pulse measured during automated blood-pressure reading

The time since interview start at which the blood pressure screen was shown is useful because it can be used to calculate

This is the pulse rate measured during the automated blood pressure readings.

Indicates the date from which a person is believed to be lost to follow-up. If there are multiple reasons that a person is lo

ACE touchscreen question \How many minutes did you usually spend walking on a typical DAY?\ The following checks w

ACE touchscreen question \How many minutes did you usually spend doing moderate activities on a typical DAY?\ The f

ACE touchscreen question \How many minutes did you usually spend doing vigorous activities on a typical DAY?\ The fo

ACE touchscreen question \About how many hours sleep do you get in every 24 hours? (please include naps)\ The follow

ACE touchscreen question \Do you smoke tobacco now?\ ""

ACE touchscreen question \In the past

ACE touchscreen question \About how often do you drink alcohol?\ If the participant activated the Help button they were

The height of the box that participant sat on for sitting-height measurement Field 51

Weight (manual entry)

ACE touchscreen question \How old were you when you first started smoking on most days?\ The following checks were

ACE touchscreen question \What year did you first come to live in the United Kingdom?\ If the participant activated the H

ACE touchscreen question \Did you previously drink alcohol?\ Field 3731 was collected from participants who indicated th

Blood pressure, automated reading, diastolic. Two measures of blood pressure were taken a few moments apart. Range

Blood pressure, automated reading, systolic. Two measures of blood pressure were taken a few moments apart. Range

Blood pressure, method of collecting reading

Stiffness device ID

Stiffness method described whether the measure was performed, and if so, whether the data was entered into the machine

Pulse rate during arterial stiffness measurement

reflection index is a measure of reflection A digital volume pulse can be considered to be the summation of a direct and a

peak to peak time in milliseconds A digital volume pulse can be considered to be the summation of a direct and a reflected

position of the peak A digital volume pulse can be considered to be the summation of a direct and a reflected component.

position of the notch A digital volume pulse can be considered to be the summation of a direct and a reflected component

position of the shoulder on the waveform A digital volume pulse can be considered to be the summation of a direct and a

Has value true if there is no notch position in the waveform

Wave data containing 3 waveforms, each consisting of one direct and one reflected component. A digital volume pulse ca

UKB ID number of the instrument that was used to perform stiffness test.

Velocity (manual entry)

Indicates whether the Intra-ocular pressure measure was performed or not for right eye

Indicates whether the Intra-ocular pressure measure was performed or not for left eye

Was optical-coherence tomography performed on the right eye

Was optical-coherence tomography performed on the left eye

In the event the automatic connection between the Assessment Centre computers and the Tanita Impedance measurement device was successful

In the event the automatic connection between the Assessment Centre computers and the Tanita Impedance measurement device was successful

In the event the automatic connection between the Assessment Centre computers and the Tanita Impedance measurement device was successful

In the event the automatic connection between the Assessment Centre computers and the Tanita Impedance measurement device was successful

In the event the automatic connection between the Assessment Centre computers and the Tanita Impedance measurement device was successful

Weight measured prior to imaging stages. Required by DXA device for calibration.

Height measured prior to imaging stages. Required by DXA device for calibration.

.

.

.

Ventricular rate during ECG measurement.

P duration during ECG

QRS duration during ECG measurement

ECG automated diagnoses

.

A value of zero indicates that no process warnings were raised by the automated device during the measurement.

Identifier for 12-lead ECG device. An empty value may be recorded in some cases for participants who did not attempt the measurement.

Distance from rump to crown when sitting, calculated as the difference between Field 51 and Field 3077.

Reason arterial stiffness measurement was not performed (entered as free-text by a UK Biobank Staff member). This field is only populated if the measurement was not performed.

This field contains the combined results of 2 ACE touchscreen questions, both asked 'Has/did your father ever suffer from high blood pressure?'

This field contains the combined results of 2 ACE touchscreen questions, both asked 'Has/did your mother ever suffer from high blood pressure?'

This field contains the combined results of 2 ACE touchscreen questions, both asked 'Have any of your brothers or sisters ever suffered from high blood pressure?'

This is the country of birth as described by the participant to an interviewer. The question was only asked to participants who were born in the UK.

This field summarises the current/past smoking status of the participant.

Derived using variables 'Current tobacco smoking' (Field 1239) and 'Past tobacco smoking' (Field 1249). Individual classification is based on whether the participant has ever smoked.

Pack years calculated for individuals who have ever smoked according to data field Ever smoking status=1, using appropriate pack-years calculation.

Average number of pack-years smoked by an individual each year, over their adult lifetime, calculated using pack-years divided by age.

Dixon technique. Measures internal fat. Will be assessed by 'AMRA'

ECG datasets are stored as XML formatted records containing the lead-traces and some ancillary reporting data.

Scout images for heart scans

Long Axis measures in three directions to cover various chambers of the heart.

Short axis scans. Used to measure function of heart. Note that the number will vary depending on the size of the participant's heart.

Aortic distensibility scans.

Cine tagging

Left Ventricular Outflow Tract scan.

Measures blood flow to try and identify heart disease.

Experimental shMOLLI sequence used by Oxford OCMR.

The DICOM images were acquired using the following parameters: Resolution: 2x2x2 mm Field-of-view: 104x104x72 mm

Left carotid artery ultrasound image

Right carotid artery ultrasound image

Screenshots captured from carotid ultrasound measurement device showing auxiliary information.

Multiband diffusion brain images in NIFTI format. The source DICOM images were acquired using the following parameters: Resolution: 2x2x2 mm

T1 structural images in NIFTI format. The source DICOM image was acquired using the following parameters: Resolution: 2x2x2 mm

This is an amalgam of sequential branching questions asked during the initial Assessment Centre visit as part of the touch screen questionnaire.

BMI value here is constructed from height and weight measured during the initial Assessment Centre visit. Value is not present if either height or weight was not measured.

Weight was measured by a variety of means during the initial Assessment Centre visit. This field amalgamates these values into a single weight measurement.

This is a derived variable based on date of birth and date of attending assessment centre and refers to the age of the participant.

The fundus image of the retina of the left eye. Images are stored in PNG-format, approximately 2MB each.

The fundus image of the retina of the right eye. Images are stored in PNG-format, approximately 2MB each.

Individual images of OCT slices through left retina in PNG format.

Individual images of OCT slices through right retina in PNG format.

The time between peaks of the waveform (the peak-to-peak time) is divided into the persons height to obtain the Stiffness index.

This is a derived variable based on date of birth and date of attending an initial assessment centre and refers to the age of the participant.

IPAQ groups

Indicates whether a person met the 2017 UK Physical activity guidelines of 150 minutes of moderate activity per week or more.

Indicates whether a person met the 2017 UK Physical activity guidelines of 150 minutes of walking or moderate activity per week or more.

PQ interval during ECG

QT interval during ECG

QTC interval during ECG

RR interval during ECG

PP interval during ECG

P axis during ECG

R axis during ECG

T axis during ECG

QRS num during ECG

Left ventricular ejection fraction Please be aware that the inline VF results are fully automated without any expert quality control.

Left ventricular end diastolic volume Please be aware that the inline VF results are fully automated without any expert quality control.

Left ventricular end systolic volume Please be aware that the inline VF results are fully automated without any expert quality control.

Left ventricular stroke volume Please be aware that the inline VF results are fully automated without any expert quality control.

Cardiac output

Cardiac index

Average heart rate

This body surface area of the participant is estimated using the formula: $BSA = 0.20247 * (weight^{0.425}) * (height^{0.725})$

Minimum carotid IMT at 120 degrees (on right side).

Mean carotid IMT at 120 degrees (on right side).

Maximum carotid IMT at 120 degrees (on right side).

Minimum carotid IMT at 150 degrees (on right side).

Mean carotid IMT at 150 degrees (on right side).

Maximum carotid IMT at 150 degrees (on right side).

Weight of person taken during impedance measurement. 0.1 increments. Range 0 - 200Kg.

Body composition estimation by impedance measurement. Body fat percentage Body fat percentage. Range 1% - 75% in 0.1% increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Fat mass Total fat mass in Kg, in 0.1Kg increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Fat free mass Fat free mass in Kg. Increment in 0.1 Kg

Body composition estimation by impedance measurement. Body water mass Units in Kg. Increments in 0.1 Kg.

Body composition estimation by impedance measurement. Body Mass Index. Increments of 0.1 .

Body composition estimation by impedance measurement. Basal metabolic rate Return value in Kilo- Joules.

Body composition estimation by impedance measurement. Impedance of whole body. is Range 150 - 1200ohms in 1ohm increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Impedance of right leg, oh Measured impedance of right leg. Range 150 - 1200ohms in 1ohm increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Impedance of left leg, ohm Measured impedance of left leg. Range 150 - 1200ohms in 1ohm increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Impedance of right arm, oh Measured impedance of right arm. Range 150 - 1200ohms in 1ohm increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Impedance of left arm, ohm Measured impedance of left arm. Range 150 - 1200ohms in 1ohm increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Right leg fat percentages Range 1-75% in 0.1% increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Right leg fat mass Right leg fat mass in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Right leg fat free mass. Right leg fat free mass in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Right leg predicted mass. in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Left leg fat percentage Range 1-75% in 0.1% increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Left leg fat mass Left leg free mass in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Left leg fat free mass. Left leg fat free mass in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Left leg predicted mass. in Kg, 0.1 increments.

Body composition estimation by impedance measurement. Right arm fat percentage Range 1-75% in 0.1% increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Right arm fat mass. Right arm fat mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Right arm fat free mass Right arm fat free mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Right Arm predicted mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Left arm fat percentage Range 1-75% in 0.1% increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Left arm fat mass. Left arm fat mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Left arm fat free mass Left arm fat free mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Left arm predicted mass. in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Trunk fat percentages Range 1-75% in 0.1% increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Trunk fat mass Trunk fat mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Trunk fat free mass. Trunk fat free mass in Kg, 0.1 increments.
 Body composition estimation by impedance measurement. Trunk predicted mass in Kg, 0.1 increments.
 Result of \White Blood Cell Count\" assay
 Result of \Red Blood Cell Count\" assay
 Result of \Haemoglobin Concentration\" assay
 Result of \Haematocrit\" assay
 Result of \Red Distribution Width\" assay
 Result of \Platelet Count\" assay
 Result of \Lymphocytes Number\" assay
 Result of \Monocytes Number\" assay
 Result of \Neutrophils Number\" assay
 Result of \Eosinophils Number\" assay
 Result of \Basophils Number\" assay
 Result of \Nucleated Red Blood Cells Number\" assay
 Result of \Lymphocytes Percentage\" assay
 Result of \Monocytes Percentage\" assay
 Result of \Neutrophils Percentage\" assay
 Result of \Eosinophils Percentage\" assay
 Result of \Basophils Percentage\" assay
 Result of \Nucleated Red Blood Cells Percentage\" assay
 Result of \Reticulocytes Percentage\" assay
 Result of \Reticulocytes Number\" assay
 Measured by immunoturbidimetric analysis on a Beckman Coulter AU5400.
 Flag returned by measurement device indicating why it could not return a numeric value for Microalbumin in urine
 Measured by enzymatic analysis on a Beckman Coulter AU5400.
 Flag returned by measurement device indicating why it could not return a numeric value for Creatinine (enzymatic) in urine
 Measured by ISE (ion selective electrode) analysis on a Beckman Coulter AU5400.
 Flag returned by measurement device indicating why it could not return a numeric value for Potassium in urine
 Measured by ISE (ion selective electrode) analysis using Beckman Coulter AU5400.
 Flag returned by measurement device indicating why it could not return a numeric value for Sodium in urine
 Measured by BCG analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by AMP(IFCC) analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by IFCC analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by immunoturbidimetric analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by immunoturbidimetric analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by IFCC analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by DPD analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by GLDH, kinetic analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by Arsenazo III analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by CHO-POD analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by enzymatic analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by immunoturbidimetric - high sensitivity analysis on a Beckman Coulter AU5800
 Measured by latex enhanced immunoturbidimetric analysis on a Siemens ADVIA 1800

The date on which the Cystatin C assay was carried out.

Measured by hexokinase analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by HPLC analysis on a Bio-Rad VARIANT II Turbo

Measured by enzyme immunoinhibition analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by enzymatic protective selection analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by immunoturbidimetric analysis on a Randox AU5800. Values for Lipoprotein A that were outside the reportable range were set to 0.

Measured by phosphomolybdate complex analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by biuret analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by GPO-POD analysis on a Beckman Coulter AU5800

Measured by uricase PAP analysis on a Beckman Coulter AU5800

Date of death. Acquired from central registry.

Underlying/primary cause of death reported for participant. Note that this may not match the text value in Field 40010 due to truncation.

Age calculated as interval between Date of Birth and Death.

Question asked: \How many glasses/beakers of water (e.g. still

Question asked: \Did you drink any coffee yesterday?\\" If the participant activated the Help feature they were shown the message: \Please enter a number between 0 and 10.\\"

Question asked: \Did you have any alcoholic drinks yesterday? For instance

Question asked: \Yesterday

Question asked: \Yesterday

Question asked: \Yesterday

Link

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=31>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=34>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=36>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=37>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=39>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=40>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=41>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=43>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=44>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=45>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=46>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=47>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=48>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=49>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=50>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=51>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=52>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=53>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=54>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=55>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=93>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=94>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=95>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=96>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=102>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=191>

give an average of the time you spend walking. For instance if on one day of the week you usually walk for 4 hours but on another day you walk for 2 hours, give an average of the time you spend doing moderate physical activity. Field 894 was collected from participants who gave an average of the time you spend doing vigorous physical activity. This information was collected from participants who gave the average time for a 24 hour day in the last 4 weeks. "

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=1239>

how often have you smoked tobacco?" Field 1249 was collected from all participants except those who indicated they currently do not smoke. please provide an average considering your intake over the last year "

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=3077>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=3160>

as defined by their answers to Field 1239"

as defined by their answers to Field 1647 This question was dropped from the touchscreen protocol on 23/10/2016."

as defined by their answers to Field 1558"

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4079>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4080>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4081>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4136>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4186>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4194>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4195>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4196>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4198>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4199>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4200>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4204>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4205>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4206>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=4207>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=5194>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=5196>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6070>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6072>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6218>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6219>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6220>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6221>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=6222>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12143>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12144>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12291>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12292>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12323>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12336>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12338>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12340>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12653>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12654>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12657>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=12658>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20015>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20051>
the illnesses were arbitrarily divided into two sets:
the illnesses were arbitrarily divided into two sets:
the illnesses were arbitrarily divided into two sets:
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20115>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20116>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20117>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20160>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20161>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20162>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20201>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20205>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20207>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20208>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20209>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20210>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20211>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20212>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20213>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20214>
which are removed in the processed data available in NIFTI format."
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20222>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20223>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20226>
which are removed in the image processing pipeline.
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20252>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21000>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21001>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21002>

Group 1 : Heart disease
Group 1 : Heart disease
Group 1 : Heart disease

The average size of these NIFTI datasets is 550MB per participant

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21003>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21015>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21016>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21017>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21018>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21021>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=21022>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22032>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22035>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22036>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22330>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22331>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22332>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22333>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22334>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22335>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22336>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22337>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22338>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22420>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22421>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22422>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22423>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22424>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22425>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22426>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22427>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22670>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22671>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22672>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22673>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22674>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=22675>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23098>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23099>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23100>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23101>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23102>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23104>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23105>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23106>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23107>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23108>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23109>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23110>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23111>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23112>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23113>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23114>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23115>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23116>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23117>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23118>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23119>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23120>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23121>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23122>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23123>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23124>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23125>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23126>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23127>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23128>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23129>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=23130>

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

performed on blood sample

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30500>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30505>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30510>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30515>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30520>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30525>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30530>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30535>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30600>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30610>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30620>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30630>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30640>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30650>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30660>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30670>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30680>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30690>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30700>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30710>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30720>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30721>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30740>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30750>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30760>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30780>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30790>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30810>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30860>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30870>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30880>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=40000>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=40001>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=40007>

fizzy

cold/iced

beer

about how long did you spend doing activities that needed vigorous effort

about how long did you spend doing activities that needed moderate effort

about how long did you spend doing activities that needed some light effort

as defined by their answers to Field 864"
as defined by their answers to question Field 884"
as defined by their answers to Field 904"
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=1160>

as defined by their answers to Field 1239"
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=1558>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=3436>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=3659>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=3731>

Stroke
Stroke
Stroke

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20218>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20250>

obtained from UK Biobank assessment centre visit. White blood count is the number of leukocytes. Analyser operating range was 0 to 99.9g/dL. Typical reference range is 4.0 to 11.0 x 10⁹/L.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Red blood cells is the number of erythrocytes. Analyser operating range was 0 to 99.9g/dL. Typical reference range is 4.0 to 11.0 x 10⁹/L.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Haematocrit Percentage is the relative volume of packed erythrocytes. Analyser operating range was 0 to 99.9g/dL. Typical reference range is 37 to 47%.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Red blood cell Distribution Width is the size distribution spread of the red blood cells. Analyser operating range was 0 to 99.9g/dL. Typical reference range is 11.5 to 14.5%.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Platelet count is the number of thrombocytes derived from the platelet count. Analyser operating range was 0 to 99.9g/dL. Typical reference range is 150 to 400 x 10⁹/L.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Lymphocyte count is the proportion of (lymphocytes / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Monocyte count is the proportion of (monocytes / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Neutrophils count is the proportion of (neutrophils / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Eosinophils count is the proportion of (eosinophils / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Basophils count is the proportion of (basophils / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Nucleated Red Blood Cells count is calculated as: Nucleated Red Blood Cells count = (Nucleated Red Blood Cells / 100) x white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Lymphocytes (Percentage) is calculated as the proportion of lymphocytes.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Monocytes (percentage) is calculated as the proportion of monocytes.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Neutrophils (Percentage) is calculated as the proportion of neutrophils.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Eosinophils (Percentage) is calculated as the proportion of eosinophils.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Basophils (Percentage) is calculated as the proportion of basophils in the white blood count.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Nucleated Red Blood Cells (Percentage) is defined as the number of nucleated red blood cells per cent of the total red blood cells.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Reticulocytes (Percentage) is the number of reticulocytes as a percentage of the total red blood cells.

obtained from UK Biobank assessment centre visit. Reticulocytes count is computed from the reticulocyte per cent multiplied by the red blood cell count.

tap) did you drink yesterday?\""

instant

wine or spirits.\" If the participant activated the Help feature they were shown the message: Please treat liqueurs as spiri

making you breathe hard? For example running

making you somewhat short of breath? For example walking upstairs

involving movement but not making you short of breath? For example shopping

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=874>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=894>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=914>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=1249>

High blood pressure
High blood pressure
High blood pressure

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30000>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30010>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30020>

computed by the formula: (red blood cells x mean corpuscular volume) / 10. Analyser operating range was 0 to 99.9%

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30070>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30080>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30120>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30130>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30140>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30150>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30160>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30170>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30180>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30190>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30200>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30210>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30220>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30230>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30240>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30250>

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=100150>
shop bought (including Starbucks)
cocktails or alcopops
cycling uphill
going to the gym
cooking

Chronic bronchitis/emphysema
Chronic bronchitis/emphysema
Chronic bronchitis/emphysema

053_prop-002110740-UNAQISI-7f77531d-3331-4b5d-a718-02d0a6a4de7f_1668606880783

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=30030>

machine made or made by hand. Coffee substitutes such as Barley Cup and Dandelion Coffee should not be recorded here.
think about what went in them. For example
carrying heavy furniture upstairs
jogging
housework

Alzheimer's disease/dementia
Alzheimer's disease/dementia
Alzheimer's disease/dementia

record this under other non-alcoholic drinks (further down the page). If some of your coffees were decaffeinated and some shandy is made from beer
martial arts
energetic dancing
playing darts/pool/bowls

Diabetes. Group 2 : Parkinson's disease
Diabetes. Group 2 : Parkinson's disease
Diabetes. Group 2 : Parkinson's disease

please choose Varied for the decaf question. Likewise
lager or cider (please record the lemonade or ginger beer used in the shandy separately); cocktails and alcopops contain
competitive sports or intensive exercise.\" If the participant activated the Help feature they were shown the message: Ple
aerobics
walking

Severe Depression
Severe Depression
Severe Depression

if you added sugar/sweetener to some of your coffees but not all
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=100580>
up stairs or up ladders
most sports
light exercise like stretching

Lung cancer
Lung cancer
Lung cancer

or if the amount of sugar/swe

heavy shovelling etc. Running
using heavy power tools and c
gentle dancing

Bowel cancer
Bowel cancer
Bowel cancer

please choose Varied. The questions on milk

reasonably fast or uphill
pushing a wheelchair
caring for people/animals

Prostate cancer. If any of codes -11

Breast cancer. If any of codes -11

Prostate cancer

decaffeinated coffee and sugar/sweetener need to be answered here. "

mountain biking. Sports/exercise: vigorous effort including step aerobics
using heavy power tools
decorating

-13 or -17 were selected then no additional Group 1 choices were allowed. If any of codes -21
-13 or -17 were selected then no additional Group 1 choices were allowed. If any of codes -21
Breast cancer. If any of codes -11

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=100240>

intensive circuit training
active farm work
light gardening

-23 or -27 were selected then no additional Group 2 choices were allowed. If the participant activated the Help button the
-23 or -27 were selected then no additional Group 2 choices were allowed. If the participant activated the Help button the
-13 or -17 were selected then no additional Group 1 choices were allowed. If any of codes -21

boxing/martial arts

taking care of farm animals

playing musical instruments.\" If the participant activated the Help feature they were shown the message: Please guess I

only select the ones
only select the ones
-23 or -27 were sele

competitively played
coal mining
includes walking whi

as defined by their answers to Field 1767 and who indicated whether their natural father was still alive or had died
as defined by their answers to Field 1767 and who indicated whether their natural mother was still alive or had died
you only need to select the illness once. The information was collected from participants who indicated they were not a

rock climbing
teaching sports etc. Walking: very brisk walking or walking uphill
walking about the home

as defined by their answers to Field 1797. Note that although Breast cancer is present in Encoding 1010 as defined by their answers to Field 1835. Note that although Prostate cancer is present in Encoding 1010 as defined by their answers to Field 1767 and that they had at least one natural brother or sister

energetic swimming
walking upstairs
walking about the office

participants were not presented with this option when selecting Father illnesses."
participants were not presented with this option when selecting Mother illnesses."
as defined by their answers to Field 1873 and Field 1883."

energetic skiing (racing
backpacking
walking for pleasure etc. At work: light carpentry

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20107>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20110>
<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=20111>

cross-country) etc. "
marching
making beds

053_prop-002110740-UNAQISI-7f77531d-3331-4b5d-a718-02d0a6a4de7f_1668606880783

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=104900>
power walking
cleaning

using crutches etc. Jogging: this is defined as running at a gentle pace. Dancing: fast or energetic dancing (not slow ballroom dancing). Electrical work: any work involving electrical equipment or wiring.

working out in a gym	aerobics
light farming tasks such as harvesting	rounding up cattle/animals

team sports (not competitively played) such as football
locksmith

golf
machine/equipment operator

horse riding	tennis	track & field	gentle swimming	skiing
assembling/repairing	directing traffic	teaching yoga	bartending	nursing

ice-skating etc. Gardening: includes energetic tasks such as digging tailoring	light to moderate shovelling theatre work (acting
---	--

mowing the lawn
working backstage) etc. Housework: includes both light and heavy housework such as cleaning

using heavy power tools
scrubbing

chopping wood etc. DIY/home improvement: includes such fairly demanding tasks such as building a fence washing

sawing hardwood	cleaning gutters	using heavy power tools	sanding floors etc. "
hanging the washing to dry	vacuuming	ironing	cooking

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=104910>

feeding pets

putting away the shopping

making beds etc. Shopping: food and non-food shopping. Playing musical instruments: playing instruments whilst seated

sick elderly animals. Gardening: watering the plants/lawn weeding using a ride-on lawn mower

picking fruit/flowers etc. DIY/home improvement: general carpentry decorating (painting

putting up wallpaper plastering scraping) car repairs wiring plumbing etc. Games: darts

snooker/pool bowling bowls croquet frisbee (gentle/moderate) playing catch

mini golf etc. Dancing: slow dancing that does not get you out of breath. Sports/exercise: activities that should not get you

hatha yoga horse riding (at walking pace) sailing (not competitive) using power boats etc. "

053_prop-002110740-UNAQISI-7f77531d-3331-4b5d-a718-02d0a6a4de7f_1668606880783

<http://biobank.ndph.ox.ac.uk/ukb/field.cgi?id=104920>

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

Il Presidente ricorda che la prof.ssa Paola Inverardi, nominata Rettrice del GSSI a far data dal 12 settembre 2022, è coordinatrice dell'Unità di Ricerca presso il DISIM del Progetto dal titolo "*SISMA: Solutions for Engineering Microservices Architectures*" finanziato dal Bando PRIN 2017.

L'accordo qui proposto è necessario per consentire il trasferimento del progetto PRIN presso il GSSI, nuova sede di afferenza della prof.ssa Inverardi, così come previsto dall'art. 6, comma 4 del Bando PRIN2017, di seguito riportato:

4. Nel caso di trasferimento del PI o di un responsabile di unità, in fase di esecuzione del progetto, da un ateneo/ente ad altro ateneo/ente, il regolare svolgimento delle attività deve essere garantito mediante accordo scritto tra i due atenei/enti (da trasmettere al MIUR per la necessaria autorizzazione), con particolare riferimento all'uso delle attrezzature già acquistate e inventariate presso l'ateneo/ente originario ed alla prosecuzione dell'attività dell'eventuale personale a tempo determinato già contrattualizzato dall'ateneo/ente originario per lo svolgimento delle attività dell'unità di ricerca interessata. Il trasferimento del finanziamento (da intendersi comunque limitato alle somme non ancora spese o impegnate) dall'ateneo/ente originario all'ateneo/ente di destinazione del PI o del responsabile di unità non può essere soggetto ad ulteriori limitazioni, fatta salva la necessità (per quanto riguarda la linea d'intervento "Sud") di garantire che l'ubicazione dell'ateneo/ente di destinazione resti all'interno delle Regioni in ritardo di sviluppo o in transizione.

Il Presidente informa che il testo dell'accordo è stato preventivamente visionato dall'Ufficio contratti e gare e procede alla lettura dello stesso.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila,

VISTO il vigente Regolamento Generale di Ateneo dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento Generale del DISIM

CONSIDERATO che presso il DISIM è attivo il Progetto "*SISMA: Solutions for Engineering Microservices Architectures*" finanziato dal Bando PRIN 2017 coordinato dalla prof.ssa Paola Inverardi

VISTO che la prof.ssa Inverardi ha assunto la carica di Rettrice e pertanto ha preso servizio presso il Gran Sasso Science Institute come professoressa ordinaria con decorrenza 12 settembre 2022

VISTO il Bando PRIN 2017 di cui al Decreto del Direttore MIUR D.D. 3728 del 27-12-2017, ed in particolare l'art. 6, comma 4

CONSIDERATO che è necessario garantire la conclusione delle attività di ricerca previste dal progetto

SENTITO il testo dell'Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

TENUTO CONTO che l'accordo prevede il trasferimento delle somme non ancora impegnate

all'unanimità/a maggioranza

approva la proposta di sottoscrizione dell'Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi di seguito riportato:

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

ACCORDO

tra

Il Dipartimento di Ingegneria e scienze dell'informazione e matematica dell'Università degli Studi dell'Aquila, con sede in Via Vetoio – Loc. Coppito – 67100 L'AQUILA (AQ) C.F. e P.IVA 01021630668, rappresentato dal Rettore Pro-tempore prof. Edoardo Alesse, all' uopo autorizzato alla sottoscrizione del presente atto dal Consiglio di Amministrazione nella seduta del _____,

e

il Gran Sasso Science Institute - GSSI con sede in Viale F. Crispi, 7 – 67100 L'AQUILA – P.IVA e C.F. n. 01984560662, rappresentato dalla Rettrice Pro-tempore prof.ssa Paola Inverardi all' uopo autorizzato alla sottoscrizione del presente atto dal Consiglio di Amministrazione nella seduta del _____,

Premesso

- che nell'ambito dei PRIN MIUR 2017 è stato ammesso a finanziamento (cfr Decreto MIUR n. 3728 del 27.12.2017) il progetto 201752ENYB dal titolo "*SISMA: Solutions for Engineering Microservices Architectures*" – P.I. Mauro Pezzè (Università degli Studi di Milano-Bicocca) il cui scopo è *quello di sviluppare approcci avanzati all'ingegneria di architetture software a microservizi*;
- che nell'ambito di tale progetto, di durata triennale, gli enti coinvolti sono rappresentati dall'Università degli Studi Milano-Bicocca, dall'Università degli Studi del Sannio di Benevento, dal Politecnico di Milano, dall'Università degli Studi di Pisa, dal Consiglio Nazionale delle Ricerche di Roma e dall'Università degli Studi dell'Aquila nella quale particolare ruolo rivestirà l'unità locale di ricerca che si è concentrata principalmente su *soluzioni innovative per migrare sistemi monolitici esistenti nelle corrispondenti versioni a microservizi*;
- che al momento della presentazione della suddetta proposta progettuale ammessa al finanziamento, la prof.ssa Paola Inverardi era indicata quale responsabile locale di tale PRIN per l'Unità locale dell'Università degli Studi dell'Aquila;
- che la prof.ssa Paola Inverardi, successivamente alla presentazione della suddetta proposta progettuale ammessa al finanziamento, ha assunto la carica di Rettrice e

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

pertanto ha preso servizio presso il Gran Sasso Science Institute come professoressa ordinaria con decorrenza 12 settembre 2022;

- che la prof.ssa Paola Inverardi ha chiesto il trasferimento dei fondi assegnati e non ancora impegnati per lo sviluppo della ricerca prevista dal progetto dall'Università degli studi dell'Aquila verso il GSSI mantenendo l'incarico di Coordinatrice dell'Unità di Ricerca;
- che il trasferimento è previsto dal Bando PRIN, previa stipula di un accordo fra l'Università dell'Aquila e il GSSI;

VISTO il Bando PRIN 2017 di cui al Decreto del Direttore MIUR D.D. 3728 del 27-12-2017, ed in particolare l'art. 6, comma 4 che prevede *"Nel caso di trasferimento del PI o di un responsabile di unità, in fase di esecuzione del progetto, da un ateneo/ente ad altro ateneo/ente, il regolare svolgimento delle attività deve essere garantito mediante accordo scritto tra i due atenei/enti (da trasmettere al MIUR per la necessaria autorizzazione), con particolare riferimento all'uso delle attrezzature già acquistate e inventariate presso l'ateneo/ente originario ed alla prosecuzione dell'attività dell'eventuale personale a tempo determinato già contrattualizzato dall'ateneo/ente originario per lo svolgimento delle attività dell'unità di ricerca interessata. Il trasferimento del finanziamento (da intendersi comunque limitato alle somme non ancora spese o impegnate) dall'ateneo/ente originario all'ateneo/ente di destinazione del PI o del responsabile di unità non può essere soggetto ad ulteriori limitazioni, fatta salva la necessità (per quanto riguarda la linea d'intervento "Sud") di garantire che l'ubicazione dell'ateneo/ente di destinazione resti all'interno delle Regioni in ritardo di sviluppo o in transizione."*

SI CONVIENE E SI STIPULA QUANTO SEGUE:**Art. 1 - Premesse**

Le premesse costituiscono parte integrante e sostanziale del presente Accordo

Art. 2 - Scopo dell'Accordo

Con il presente Accordo le Parti intendono collaborare al fine di portare a termine le attività di ricerca connesse al progetto 201752ENYB dal titolo *"SISMA: Solutions for Engineering Microservices Architectures"* secondo le modalità previste al successivo art. 3.

Art. 3 - Modalità di attuazione dell'Accordo

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

Le Parti si impegnano fin da ora ad operare nello spirito di massima collaborazione e a scambiare tutte le informazioni tecniche e scientifiche necessarie per il corretto svolgimento degli impegni previsti dal presente Accordo.

Il Dipartimento di Ingegneria e scienze dell'informazione e matematica dell'Università degli Studi dell'Aquila trasferirà al Gran Sasso Science Institute i fondi assegnati al progetto 201752ENYB dal titolo *"SISMA: Solutions for Engineering Microservices Architectures"* all'Unità di Ricerca Coordinata dalla prof.ssa Paola Inverardi e non ancora impegnati, quantificati alla data odierna pari ad euro:

	A s s e g n a t o	G i à r e n d i c o n t a t o	I m p e g n a t o	Tr a s f e r i b i l e
Finanziamen to di Ateneo	5 4 . 0 5 0 , 0	5 4 . 0 5 0 , 0	= =	==

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

	0	0		
Finanziamento MUR	1 2 3 . 2 3 0 0 , 0 0	3 7 . 5 3 0 , 6 2	3 8 . 0 5 2 , 0 0	47 .6 47 ,3 8
Totale trasferibile GSSI				47 .6 47 ,3 8

A valere sul Progetto PRIN 2017 "SISMA" non sono stati acquistati materiali inventariabili presso UnivAQ.

Art. 4 - Responsabilità

Ciascuna Parte è esonerata da ogni responsabilità derivante dai rapporti di lavoro che venissero instaurati dall'altra Parte nell'ambito delle attività di cui al presente Accordo.

Ciascuna Parte garantisce:

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

- a) la copertura assicurativa per infortuni sul lavoro e per malattie professionali del proprio personale che, in virtù del presente Accordo, presta servizio o è chiamato a frequentare i laboratori o i centri dell'altra Parte;
- b) una copertura assicurativa per la responsabilità civile per i danni che il proprio personale potrà causare nell'espletamento delle attività presso terzi.

Il personale di entrambe le Parti è tenuto ad uniformarsi ai regolamenti disciplinari e di sicurezza in vigore nelle sedi di esecuzione delle attività attinenti al presente Accordo, nel rispetto della normativa per la sicurezza dei lavoratori di cui al d. lgs. n.81/2008 e ss.mm.ii.

Il personale contrattualizzato a tempo determinato presso UnivAQ per lo svolgimento delle attività dell'unità di ricerca concluderà le attività previste dal contratto con la supervisione del prof. Massimo Tivoli.

Art. 5 - Oneri

Ogni Parte si impegna a sostenere esclusivamente gli oneri gravanti sulla medesima in conseguenza delle attività necessarie all'attuazione del presente Accordo.

Art. 6 – Riservatezza

Le informazioni che le Parti si scambieranno vicendevolmente sono da ritenersi riservate, quindi non divulgabili per alcun motivo a terzi, salvo diverso obbligo di legge o previo espresso consenso dell'altra Parte.

Le Parti si impegnano a concordare il livello di riservatezza di qualsiasi documento o informazione che Esse abbiano a scambiarsi, limitandone anche la conoscenza e diffusione a quelle sole persone, uffici, organi o cariche che, per ragione della loro funzione, abbiano bisogno di venirne a conoscenza.

Art. 7 - Risultati

Per quanto attiene alle cognizioni ed ai brevetti, si applica quanto previsto dall'art. 2588 del codice civile e dall'art. 65 del d. lgs. n.30/2005.

Nei limiti di quanto previsto dalla normativa vigente, i dati utilizzati per le attività di studio e di sperimentazione non possono, comunque, essere comunicati a terzi, se non previo accordo delle Parti e qualora si tratti di dati forniti da altre pubbliche amministrazioni, non possono essere comunicati a terzi, in mancanza di autorizzazione scritta dell'amministrazione interessata.

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

Le Parti si impegnano reciprocamente a dare atto - in occasione di presentazioni pubbliche - dei risultati conseguiti o in caso di redazione e pubblicazione di documenti di qualsiasi tipo, che quanto realizzato consegue alla collaborazione instaurata con il presente Accordo.

Art. 8 - Informazione al pubblico e pubbliche relazioni

La diffusione di informazioni al pubblico in merito al presente Accordo, fatto salvo quanto prescritto ai precedenti art. 6 e art. 7, può essere effettuata da ciascuna Parte nell'ambito delle proprie competenze, previa informazione all'altra Parte.

I contenuti dei comunicati relativi alle attività congiunte verranno concordati preventivamente fra le Parti.

Le Parti si impegnano ad indicare che il lavoro è stato svolto in collaborazione con l'altra Parte.

Art. 9 - Informativa trattamento dati

Le Parti dichiarano di applicare le disposizioni del Decreto Legislativo 30 giugno 2003 n. 196, così come modificato dal decreto legislativo 10 agosto 2018, n. 101 per l'adeguamento alle disposizioni del Regolamento UE n. 679/16 del 27 aprile 2016, relativo alla protezione delle persone fisiche con riguardo al trattamento dei dati personali nonché alla libera circolazione di tali dati, e tutta la normativa nazionale in materia di trattamento dei dati personali.

Art. 10 - Durata, modifiche e recesso

Il presente Accordo avrà una durata di tre anni dalla data dell'ultima firma apposta digitalmente.

Ogni modifica e/o integrazione del presente Accordo dovrà essere concordata, scritta e sottoscritta dalle Parti, a pena di nullità.

È facoltà di ciascuna Parte recedere in qualsiasi momento dal presente Accordo. La comunicazione di recesso deve avvenire tramite PEC almeno sei mesi prima dalla data in cui il recesso avrà efficacia e farà salve le attività eventualmente in corso.

Art. 11 - Controversie

Le parti concordano di definire amichevolmente qualsiasi controversia che possa nascere dall'interpretazione e attuazione del presente Accordo. Nel caso in cui non sia possibile raggiungere l'accordo, la controversia sarà devoluta al giudice amministrativo, ai sensi dell'art. n. 133 del Codice del processo amministrativo ed in particolare al TAR dell'Abruzzo – L'Aquila

Art. 12 - Disposizioni finali

13.5 Accordo per il trasferimento al GSSI del progetto PRIN2017 prof.ssa Paola Inverardi

Per quanto non previsto dal presente Accordo si fa rinvio alle leggi ed ai regolamenti che regolano la materia.

Il presente Accordo è firmato digitalmente, ex art. 24, commi 1 e 2 del C.A.D. – codice dell'Amministrazione digitale – Decreto Legislativo 7 marzo 2005, n. 82 ed è soggetto a registrazione solo in caso d'uso a cura e spese della Parte interessata.

L'imposta di bollo, il cui costo è posto a carico di entrambe le parti in egual misura, è assolta mediante apposizione del contrassegno telematico nn. _____

Le parti concorderanno eventuali adeguamenti del presente Accordo a disposizioni legislative di carattere innovativo ed integrativo che potranno sopravvenire nel corso del periodo di validità dell'Accordo stesso.

Letto, approvato e sottoscritto.

Per l'Università degli Studi dell'Aquila

Per il Gran Sasso Science Institute

Il Rettore
prof. Edoardo Alesse

La Rettrice
prof.ssa Paola Inverardi

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

13.6 Accordo per la concessione di contributo alla ricerca GSSI-DISIM – prof. Davide Di Ruscio

Il Presidente lascia la parola al prof. Davide Di Ruscio, il quale illustra l'accordo qui proposto.

La motivazione dell'accordo è relativa all'attività di ricerca e collaborazione da tempo in essere con la prof.ssa Paola Inverardi sulla modellazione e gestione dei dati da un punto di vista etico e di privacy. La ricerca si colloca nell'ambito del progetto Exosoul (<https://exosoul.disim.univaq.it/>) il cui referente scientifico è la Prof.ssa Paola Inverardi.

Nell'ambito delle mie attività di ricerca, e in particolare nel progetto EU TYPHON, ho avuto modo di lavorare su tecniche model-driven per gestire tutti gli aspetti del ciclo di vita del dato. L'accordo in oggetto è pertanto necessario per dare seguito alla collaborazione tecnico-scientifica a valle della presa di servizio della prof.ssa Inverardi presso il GSSI.

Il Presidente ringrazia il prof. Di Ruscio ed informa che il testo dell'accordo è stato preventivamente visionato dall'Ufficio Contratti e Gare e procede alla lettura dello stesso.

Il Consiglio

- VISTO** il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila,
VISTO il vigente Regolamento Generale di Ateneo dell'Università degli Studi dell'Aquila
VISTO il vigente Regolamento Generale del DISIM
SENTITO il testo dell'Accordo per la concessione di contributo alla ricerca al G.S.S.I.
CONSIDERATO che i Responsabili Scientifici dell'Accordo sono:
- Per l'Università, prof. Davide Di Ruscio
- Per G.S.S.I., prof.ssa Paola Inverardi

all'unanimità/a maggioranza

approva la proposta di sottoscrizione dell'Accordo per la concessione di contributo alla ricerca al GSSI presentata dal prof. Davide Di Ruscio di seguito riportata:

ACCORDO PER LA CONCESSIONE DI CONTRIBUTI ALLA RICERCA**TRA**

L'Università degli Studi dell'Aquila – Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica, con sede in L'Aquila, P.zza Santa Margherita n. 2, C.F. e P.I. 01021630668 nel seguito denominata UNIVAQ, rappresentata dal Prof. Edoardo Alesse, nato a Leonessa (RI) il 17/02/1958, Rettore pro-tempore e Legale rappresentante di UNIVAQ, ed ivi domiciliato per la carica

E

Gran Sasso Science Institute, con sede in L'Aquila Viale F. Crispi, 7 Codice Fiscale e Partita IVA 01984560662, (di seguito denominato GSSI rappresentato da Prof.ssa Paola Inverardi, nata all'Aquila il 03/11/1957;

Premesso che

13.6 Accordo per la concessione di contributo alla ricerca GSSI-DISIM – prof. Davide Di Ruscio

- UNIVAQ, ai sensi dell'art. 2, comma 2 del proprio Statuto, nell'esercizio della propria autonomia funzionale, garantisce e promuove la libera attività di ricerca dei docenti, la pubblicità dei risultati scientifici e il libero confronto delle idee. A tale scopo promuove ogni azione atta a perseguire la qualità della ricerca e della didattica favorendo la cooperazione nazionale e internazionale;
- Il GSSI ha manifestato l'interesse di svolgere in collaborazione dell'attività di interesse comune relativa allo sviluppo di sistemi di raccomandazione per gestire la privacy degli utenti di sistemi complessi nella società digitale;
- presso il DISIM è attivo il progetto denominato TYPHON – Polyglot and Hybrid Persistence Architectures for Big Data Analytics finanziato all'interno del programma H2020-ICT-2017 e coordinato dal prof. Davide di Ruscio inerente la seguente ricerca: piattaforme di modellazione e gestione dati su tecnologie di persistenza ibride;
- il progetto di ricerca TYPHON è già stato rendicontato e tale rendiconto è stato approvato dalla Commissione europea, che ha provveduto ad erogare il saldo delle somme previste;
- a valle della conclusione delle attività del progetto TYPHON si sono aperti nuovi sviluppi di ricerca inerenti la *"Modellazione e gestione della user privacy nella società digitale"* che consentono la prosecuzione delle attività di ricerca inerenti il progetto Exosoul (<https://exosoul.disim.univaq.it/>) il quale ha delle affinità con le tecniche di modellazione e gestione dei dati definite in TYPHON;
- la prosecuzione del programma delle nuove ricerche, avviato in collaborazione con la prof.ssa Paola Inverardi, consentirebbe di usufruire delle sinergie delle due Istituzioni di ricerca, portando un intenso beneficio per lo sviluppo di interessi comuni;
- L'art. 15 della Legge 7 agosto 1990 n. 241 prevede la possibilità per le amministrazioni pubbliche di concludere accordi per disciplinare lo svolgimento di attività di interesse comune e che detti accordi debbano essere sottoscritti con firma digitale, pena la nullità degli stessi;

con il presente accordo si conviene e si stipula quanto segue

Art. 1 – Oggetto

L'Università degli Studi dell'Aquila contribuisce all'esecuzione della ricerca avente per oggetto: *"Modellazione e gestione della user privacy nella società digitale"*

Art. 2 – Durata

Il presente contratto avrà la durata di 36 mesi a partire dalla data di sottoscrizione del presente atto e potrà essere di comune accordo prorogato su richiesta scritta e motivata della parte che richiede la proroga.

Art. 3 – Sede di svolgimento delle attività

Le attività di cui all'articolo 1 saranno svolte presso le strutture del GSSI e, qualora le esigenze della ricerca lo richiedano, presso la sede del UNIVAQ-DISIM con modalità da definire tra i responsabili scientifici.

Art. 4 – Responsabili della ricerca

13.6 Accordo per la concessione di contributo alla ricerca GSSI-DISIM – prof. Davide Di Ruscio

Responsabile scientifico dell'esecuzione del programma di ricerca per UNIVAQ è il prof. Davide Di Ruscio.

Responsabile scientifico dell'esecuzione del programma di ricerca per il GSSI è la prof.ssa Paola Inverardi.

Art. 5 – Relazioni

Il Responsabile del programma di ricerca per il GSSI prof.ssa Paola Inverardi provvederà a redigere:

- relazioni intermedie, ogni 12 mesi sullo stato dell'attività che, oltre a dettagliare le attività svolte nell'ambito del programma nel periodo di riferimento, evidenzieranno gli eventuali risultati raggiunti durante detto periodo sul complesso dei lavori stabiliti nel programma ed il programma dei lavori previsti per il periodo successivo;
- una relazione finale, entro 60 giorni dalla data della conclusione del programma con una descrizione di tutti i risultati ottenuti.

Art. 6 – Contributo/i alla ricerca

A titolo di ristoro delle spese sostenute per l'esecuzione del programma di ricerca oggetto del presente contratto UNIVAQ-DISIM verserà al GSSI un contributo complessivo di euro 47.268,97 (quarantasettemiladuecentosessantotto/97 euro), da corrispondersi come segue:

- 70% alla sottoscrizione dell'accordo
- 20% alla presentazione della prima relazione sullo stato delle attività
- 10% alla conclusione delle attività.
-

Art. 7 - Tutela del segreto

Le Parti si impegnano a garantire, per sé e per il proprio personale, la massima riservatezza riguardo alle informazioni, i dati, i metodi di analisi, le ricerche, ecc., di cui vengano a conoscenza nell'ambito dello svolgimento del programma di ricerca di cui all'art. 1, a non divulgarle a terzi e ad utilizzarle esclusivamente per il raggiungimento delle finalità oggetto del presente contratto, ad astenersi da ogni azione che possa nuocere alla brevettabilità di detti risultati.

Gli obblighi di cui al presente articolo sopravviveranno al completamento del programma di ricerca ed alla conseguente estinzione del presente contratto, nonché alla cessazione o risoluzione del medesimo per qualsiasi causa; essi cesseranno di essere efficaci solo quando le informazioni diverranno di pubblico dominio per fatti non imputabili a DISIM e/o al GSSI e comunque decorsi cinque anni dalla cessazione del contratto.

Art. 8 – Proprietà dei risultati

Tutti i diritti di proprietà sui risultati della ricerca e sulle sue utilizzazioni industriali apparterranno alle parti contraenti e la loro utilizzazione sarà libera, con il solo obbligo di citare, nelle eventuali pubblicazioni, che essi sono scaturiti con il contributo del Contraente.

L'eventuale brevettazione dei risultati conseguiti in comune sarà oggetto di separato accordo tra le parti; in questo caso le eventuali pubblicazioni saranno subordinate all'espletamento di tutte le procedure atte alla protezione brevettuale dei risultati.

13.6 Accordo per la concessione di contributo alla ricerca GSSI-DISIM – prof. Davide Di Ruscio

Art. 9 – Risoluzione

In caso di inadempimento di una delle parti dagli obblighi derivanti dal presente contratto, lo stesso potrà risolversi, a seguito di diffida ad adempiere, ai sensi dell'art. 1454 c. c.

Art. 10 – Trattamento dei dati personali

L'Università provvede al trattamento dei dati personali relativi alla parte contraente nell'ambito del perseguimento dei propri fini istituzionali e di quanto previsto dal proprio regolamento emanato in attuazione del d.lgs 196/2003 "Codice in materia di protezione dei dati personali".

Il contraente si impegna a trattare i dati personali provenienti dall'Università unicamente per le finalità previste dal presente contratto.

Art. 11 - Clausola compromissoria

Qualsiasi controversia derivante dalla presente convenzione sarà definita da un Collegio Arbitrale composto di tre membri di cui due nominati rispettivamente dalle parti e il terzo, con funzioni di Presidente, nominato in accordo tra le parti o dal Tribunale di L'Aquila.

Art. 12 – Foro competente

Per le controversie di cui non sia stata possibile la composizione amichevole o sia risultato infruttuoso il ricorso all'arbitrato di cui all'articolo precedente, il foro competente è quello di L'Aquila.

Art. 13 – Registrazione

Eventuali spese di bollo e registrazione del presente contratto sono a carico del Contraente.

Il presente Accordo è firmato digitalmente, ex art. 24, commi 1 e 2 del C.A.D. – codice dell'Amministrazione digitale – Decreto Legislativo 7 marzo 2005, n. 82 ed è soggetto a registrazione solo in caso d'uso a cura e spese della Parte interessata.

Letto, approvato e sottoscritto.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELL'AQUILA

GRAN SASSO SCIENCE INSTITUTE

Il Rettore

La Rettrice

Prof. Edoardo Alesse

Prof.ssa Paola Inverardi

Ai sensi degli artt. 1341 e 1342 C.C. si approvano specificamente gli artt. 9, 11, 12, 13 del presente contratto/convenzione.

13.6 Accordo per la concessione di contributo alla ricerca GSSI-DISIM – prof. Davide Di Ruscio

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELL'AQUILA

GRAN SASSO SCIENCE INSTITUTE

Il Rettore

La Rettrice

Prof. Edoardo Alesse

Prof.ssa Paola Inverardi

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

Il Presidente lascia la parola alla prof.ssa Cassioli, la quale illustra l'accordo qui proposto.

Il Laboratorio Nazionale di Cybersecurity del CINI ha già lanciato l'edizione 2023 del cyberchallenge.it a cui il nostro Ateneo ha già aderito come sede ospitante nelle ultime 3 edizioni. Il cyberchallenge è il primo **programma italiano di addestramento alla cybersecurity per giovani di talento delle scuole superiori e università** di età compresa tra i 16 e i 24 anni per identificare e collocare la prossima generazione di professionisti della sicurezza informatica.

Si affianca un'attività formativa tradizionale ad un approccio orientato alla **gamification**, che si traduce nella partecipazione a **competizioni in arene virtuali** che simulano scenari e ambienti reali.

Non occorre essere esperti di programmazione ma solo avere **curiosità** nelle discipline scientifico-tecnologiche, capacità logiche, di problem solving e di comunicazione.

Le iscrizioni sono già aperte, i test di ammissione si svolgeranno in remoto agli inizi di febbraio, che permetteranno di selezionare 20 studenti effettivi e 5 riserve. I 20 candidati effettivi si scontreranno nella gara locale, e dai risultati ottenuti combinati con i risultati ottenuti durante l'addestramento verranno designati i migliori 6 ragazzi/e che rappresenteranno la nostra università al livello nazionale. Tutte le edizioni CyberChallenge.IT culminano infatti nel **campionato italiano Capture-The-Flag di tipologia Attack & Defence** che dà la possibilità ai più meritevoli di partecipare alla selezione della **Squadra Nazionale di CyberDefenders** che parteciperà alla European Cyber Security Challenge.

Tutte le informazioni sono disponibili sul sito <https://cyberchallenge.it>; il responsabile dei rapporti con gli studenti per la nostra sede sarà il Dott. Walter Tiberti walter.tiberti@univaq.it, che si occuperà anche dell'organizzazione insieme al Laboratorio Nazionale di Cybersecurity del CINI.

Nelle precedenti 3 edizioni abbiamo avuto centinaia di adesioni da parte sia di nostri studenti, sia di studenti delle scuole, il che va ad integrare le politiche di orientamento del DISIM. Nelle prime due edizioni, essendo online, abbiamo affiancato il cyberchallenge ad un seminario professionalizzante a cui hanno aderito circa un centinaio di studenti di tutti i nostri corsi di studio. Quest'anno ci stiamo pensando, dati i problemi logistici legati alla scarsità di aule capienti – questo comunque esula dalla presente convenzione.

Il Consiglio,

VISTO il vigente Statuto dell'Università degli Studi dell'Aquila,

VISTO il vigente Regolamento Generale di Ateneo dell'Università degli Studi dell'Aquila

VISTO il vigente Regolamento Generale del DISIM

SENTITO il testo della Convenzione attuativa con il Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023

CONSIDERATO che la responsabile delle attività per l'Ateneo sarà la prof.ssa Dajana Cassioli

CONSIDERATO che per l'annualità 2023 non è prevista una quota di adesione

all'unanimità/ a maggioranza

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

approvare la Convenzione attuativa con il Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per l'adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 di seguito riportata:

Convenzione attuativa

tra

CINI - Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica - con sede in via Ariosto, 25, 00185 Roma, P.I. 03886031008, rappresentato dal Presidente Prof. Ernesto Damiani, in virtù dei poteri conferitogli dal Consiglio Direttivo del 23.05.2022 con Delibera n. CD/006/2022 (di seguito, per brevità, "il CINI" e insieme agli altri soggetti firmatari "le Parti")

e

L'Università degli Studi dell'Aquila C.F. e P.IVA n. 01021630668, con sede legale a L'Aquila, in Palazzo Camponeschi, Piazza Santa Margherita 2 rappresentata dal Rettore prof. Edoardo Alesse, nato a Leonessa (RI) il 17/02/1958;

(di seguito, per brevità, "la SEDE" e insieme agli altri soggetti firmatari "le Parti");

premesso che

- a) ai fini del presente accordo La SEDE agisce per tramite del proprio Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica;
- b) Il CINI (Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica) è un Consorzio costituito il 6 dicembre 1989 al quale oggi afferiscono 50 Università statali, riconosciuto dal Ministero dell'Università e della Ricerca (MUR) e sottoposto alla valutazione da parte dell'ANVUR;
- c) Le strutture operative del Consorzio sono costituite da:
 - Le Unità di Ricerca, aventi il fine di svolgere l'attività di ricerca presso le Università consorziate e sono costituite da professori, ricercatori universitari, assegnisti di ricerca, dottorandi, borsisti, tecnici laureati e tecnici delle Università afferenti al CINI;
 - I Laboratori Nazionali, aventi il fine di realizzare e gestire su scala nazionale e internazionale sinergie tra le varie Unità di Ricerca su specifici temi di ricerca, nel quadro degli obiettivi programmatici del Consorzio;
- d) I rapporti tra il Consorzio ed Enti terzi sono da regolarsi secondo la vigente normativa sui consorzi pubblici, considerata anche la possibilità di stipulare convenzioni connesse allo svolgimento di attività di mutuo interesse;
- e) La SEDE ha aderito al CINI in data 09.07.2009 ed è nodo afferente al Laboratorio Nazionale di Cybersecurity dal 01.07.2015, come da atti approvati dagli organi competenti;
- f) La SEDE ed il CINI hanno sottoscritto in data 17.01.2018 (repertorio UnivAQ n. 39/2018) una Convenzione per l'attivazione di una sede distaccata del Consorzio CINI presso la SEDE, che rende possibile per il personale afferente all'Unità di Ricerca della SEDE e quello del CINI l'organizzazione e lo svolgimento di attività di ricerca, anche tramite la partecipazione a bandi, lo

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

scambio di informazioni e di dati, la condivisione di strumenti di elaborazione e la sperimentazione di attività innovative di didattica avanzata presso la SEDE;

- g) Il CINI, attraverso il Cybersecurity National Lab, ha avviato il programma CyberChallenge.IT (nel seguito, per brevità, "Programma"): un programma di formazione per i giovani talenti che punta a ridurre significativamente l'odierna carenza della forza lavoro in ambito informatico, ponendosi come la principale iniziativa italiana per identificare, attrarre, reclutare e collocare la prossima generazione di professionisti della sicurezza informatica, incoraggiandoli a riempire i ranghi dei futuri professionisti della cybersicurezza, mettendo così le loro capacità a disposizione del sistema Paese.
- h) Il Programma vuole creare e far crescere la comunità dei cyberdefender investendo sui giovani e punta a:
- stimolare l'interesse verso le materie tecnico scientifiche e, in particolare, verso l'informatica;
 - far conoscere le opportunità professionali offerte dai percorsi formativi sulla sicurezza informatica;
 - mettere i giovani in contatto diretto con realtà aziendali, anche tramite specifiche sfide che saranno chiamati ad affrontare;
 - identificare i giovani talenti cyber e contribuire al loro orientamento e alla loro formazione professionale.
- i) L'edizione 2023, come le precedenti, offrirà agli studenti selezionati corsi di addestramento presso le sedi universitarie partecipanti e culminerà nel sesto campionato italiano Capture-The-Flag (CTF) in cybersicurezza che permetterà di identificare la Squadra Nazionale di Cyberdefender (TeamItaly) che parteciperà alla European Cyber Security Challenge (ECSC).
- j) È interesse della SEDE collaborare al Programma, configurandosi come una delle sedi locali presso cui si svolgeranno le attività previste dall'edizione 2023 del Programma stesso;

Tutto ciò premesso,
tra le Parti si conviene e stipula quanto segue:

Art. 1 - Premesse

- Le premesse e gli allegati formano parte integrante della presente Convenzione attuativa (per il seguito, "Convenzione").

Art. 2 - Oggetto

- Le Parti convengono di collaborare all'interno del Programma CyberChallenge.IT per l'anno 2023, secondo le modalità definite ai successivi articoli.

Art. 3 - Responsabilità del CINI all'interno del Programma

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

- All'interno del Programma, il CINI, attraverso il Laboratorio Nazionale Cybersecurity, ha la responsabilità dei seguenti aspetti:
 - a) Ricerca degli sponsor nazionali
 - b) Gestione di tutti gli aspetti amministrativi/finanziari a livello nazionale
 - c) Stipula delle necessarie polizze Assicurative
 - d) Gestione delle procedure di iscrizione e di ammissione degli studenti, in termini di adempimenti normativi per privacy e aspetti tecnici
 - e) Preparazione dei test di ammissione; messa a disposizione e gestione della piattaforma necessaria alla loro erogazione
 - f) Preparazione di tutto il materiale utilizzato durante il percorso formativo; messa a disposizione e gestione della piattaforma necessaria alla fruizione
 - g) Preparazione e gestione della gara locale e di quella nazionale; messa a disposizione e gestione della piattaforma necessaria
 - h) Messa a disposizione delle piattaforme di videoconferenza necessarie per lo svolgimento in modalità remota di tutte le attività previste dal Programma
 - i) Organizzazione della Cerimonia nazionale per le premiazioni
 - j) Comunicazione integrata e istituzionale
 - k) Diffusione della partecipazione della Sede attraverso la pubblicazione del Logo della stessa su web, social e materiali pubblicitari relativi al programma
 - l) Organizzazione e gestione delle attività della Squadra Nazionale di Cyberdefender.

Art. 4 - Responsabilità della SEDE all'interno del Programma

- All'interno del Programma, la SEDE ha la responsabilità dei seguenti aspetti:
 - a) Garantire la copertura delle spese da sostenere, a livello locale, per la realizzazione del Programma
 - b) Reperire le necessarie autorizzazioni istituzionali per la partecipazione al Programma
 - c) Reperire gli spazi adeguati allo svolgimento, presso la SEDE, di:
 - o attività previste dal percorso formativo
 - o gara locale
 - d) Permettere la erogazione, a livello locale, delle attività didattiche previste dal percorso formativo del Programma
 - e) Promuovere, con alcune delle Suole Superiori di II grado presenti sul territorio, l'avviamento di *Percorsi per le competenze trasversali e per l'orientamento*
 - f) Autorizzare il CINI a utilizzare il logo della SEDE in tutte le attività di pubblicazione del Programma

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

g) Utilizzare il logo ufficiale del Programma in tutte le comunicazioni istituzionali relative al Programma stesso.

- Nel caso in cui eventuali restrizioni lo imponessero, o comunque su libera e insindacabile scelta della SEDE, le attività di cui al precedente comma d) potranno essere svolte in modalità remota, utilizzando le piattaforme di videoconferenza messe a disposizione dal Programma.

Art. 5 – Eventuali sponsorizzazioni

- La SEDE può:
 - a. Attrarre sponsor in modo autonomo per finanziare i costi sostenuti localmente per lo svolgimento del Programma. L'introito di tali sponsorizzazioni è interamente acquisito direttamente dalla SEDE stessa, con l'impegno a utilizzare tali fondi ai fini del programma.
 - b. Reperire sponsor a livello nazionale. In tal caso la SEDE avrà a disposizione, presso il CINI, una quota parte pari a:
$$0,425 * (\text{Somma degli importi versati dagli sponsor})$$

Art. 6 - Oneri

- Il CINI si impegna alla realizzazione di quanto dettagliato nell'Art. 3
- La SEDE si impegna alla realizzazione di quanto dettagliato nell'Art. 4.

Art. 7 - Responsabili

- Le Parti designano, quali Responsabili delle attività previste della presente Convenzione:
 - o Per il CINI: prof. Paolo PRINETTO
 - o Per la SEDE: prof.ssa Dajana CASSIOLI

Art. 8 - Responsabilità

- Ciascuna parte resta responsabile, nei confronti del proprio personale dipendente e di quello legittimato a partecipare al Programma, per quanto riguarda gli obblighi previdenziali e assicurativi propri dello stato giuridico di ciascun soggetto, compresi quelli relativi alla copertura di ogni rischio connesso alla derivante dalle attività specifiche.
- In materia di rischi, infortuni, igiene e sicurezza sul lavoro CINI e la SEDE provvedono alla attuazione di quanto richiesto dalla normativa vigente per la parte di loro competenza.
- A norma del D.Lgs. 81/08 e successive modifiche e integrazioni, il Presidente del CINI è individuato quale "datore di lavoro" del personale dipendente CINI, per la SEDE il "datore di lavoro" è individuato nel Rettore.
- Il Referente identificato ai sensi dell'art. 5 svolge anche funzione di Responsabile della sicurezza.

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

- Per le apparecchiature di uso comune, il proprietario ne garantisce la conformità alle norme di sicurezza sia all'atto dell'installazione sia per l'intero periodo di utilizzo.
- La sorveglianza sanitaria del personale dei due Enti è di competenza dei rispettivi datori di lavoro che definiranno le modalità per uno scambio di informazioni in merito.

Art. 9 - Sicurezza del personale

- Il personale delle Parti è tenuto all'osservanza delle disposizioni di legge in materia di sicurezza e salute dei lavoratori sul luogo di lavoro e a quanto indicato nella normativa vigente presso la Parte ospitante.
- Ciascuna Parte è inoltre tenuta a informare il personale dell'altra Parte ospitato dei rischi presenti presso gli ambienti di lavoro frequentati e delle misure di prevenzione eventualmente adottate, ivi comprese quelle relative alla gestione dell'emergenza.

Art. 10 - Durata e recesso

- La presente Convenzione entrerà in vigore alla data della sottoscrizione di entrambe le Parti e resterà valido fino al completamento di tutte le attività (incluse quelle amministrative, di rendicontazione e di chiusura definitiva) della edizione 2023 del Programma e comunque non oltre 24 mesi dall'inizio delle attività;
- Per comprovate motivazioni le Parti possono recedere dalla presente Convenzione con un preavviso di 3 mesi e, al verificarsi di tale circostanza, si accorderanno sulle modalità di conclusione delle attività in corso di svolgimento prima della comunicazione di recesso da effettuarsi mediante PEC.
- Gli indirizzi PEC delle Parti sono i seguenti:
 - o Per CINI: consorzio.cini@legalmail.it
 - o Per la SEDE: protocollo@pec.univaq.it

Art. 11 - Trattamento dei dati

- Le Parti si impegnano reciprocamente a trattare e custodire i dati personali e le informazioni, su supporto sia cartaceo sia informatico, relativi all'espletamento di attività riconducibili alla presente convenzione, in conformità alle misure e agli obblighi imposti dal Regolamento Generale sulla protezione dei dati UE 2016/679, dal D.lgs. 101/2018 e dal D.lgs. 196/2003.
- I titolari del trattamento dei dati sono il Rettore per SEDE e il prof. Ernesto DAMIANI per CINI.

Art. 12 - Registrazione e bollo

- Le spese di bollo e affini relative alla stipula della presente Convenzione sono equamente divise tra le Parti. L'imposta di bollo è assolta in modo virtuale in base a quanto stabilito dall'art. 7 del D.M. 23 gennaio 2004.

13.7 Convenzione attuativa con Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica "CINI" per adesione di Ateneo al progetto CyberChallenge.IT 2023 – prof.ssa Dajana Cassioli

- La presente Convenzione è soggetta a registrazione in caso d'uso ai sensi degli artt. 5 e 39 del DPR n. 131/86 e s.m. con spese a carico della parte che richiede la registrazione.

Art. 13 - Controversie

- Per tutte le controversie derivanti dall'interpretazione e/o esecuzione della presente Convenzione e che non siano risolte in via amichevole tra le Parti sarà competente il Foro di L'Aquila.

La presente Convenzione viene sottoscritta in forma digitale.

L'Aquila,

SEDE

Prof. Edoardo ALESSE (Rettore)

CINI

Prof. Ernesto DAMIANI

La presente delibera è approvata seduta stante per la parte dispositiva.

15.1 Equivalenza titolo di dottorato di ricerca estero finalizzata alla presa di servizio in qualità di assegnista di ricerca – dott. Marcos Paulo Tassi

Il Presidente informa che il dott. Marcos Paulo Tassi è risultato vincitore di un Assegno di Ricerca di cui al Bando Repertorio n. 73/2022 Prot. n. 744 del 25.02.2022, vertente su un progetto dal titolo “Strutture geometriche differenziale e algebriche”. Il requisito di ammissione al bando prevedeva il possesso del titolo di Dottore di Ricerca in Matematica o titolo equivalente corredata da curriculum scientifico-professionale idoneo per lo svolgimento della ricerca, e nel caso di specie il dott. Tassi ha presentato il titolo di Doutor em Ciências em Matemática conseguito in data 03.06.2020 all'Universidade Federal de São Carlos (Brasile). Ai sensi di quanto previsto dall'art. 3 comma 2 del bando, la Commissione Giudicatrice, esaminando la certificazione prodotta, ne ha stabilito l'equipollenza (o più precisamente, l'equivalenza) ai fini della partecipazione alla procedura di selezione con il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica previsto nell'ordinamento universitario italiano, all'esito della quale per l'appunto il dott. Tassi è stato dichiarato vincitore. Al momento della presa di servizio del dott. Tassi, si è però posto il problema di stabilire come da prassi l'equipollenza ad ogni effetto legale di tale titolo di dottorato, ma tutti i tentativi intrapresi a tal fine presso il MUR hanno dato esito negativo, stante il fatto che dal 1 marzo 2022, ai sensi dell'art. 1, comma 28-quinquies, punto 3.2 della Legge 15/2022, la competenza per il riconoscimento della validità legale dei dottorati esteri è stata trasferita in capo alle Università, come ben descritto nel documento del CIMEA all'interno del quale sono state pubblicate le linee guida per l'implementazione di tale procedura:

<https://www.cimea.it/Upload/Documenti/>

Doc_CIMEA_137_Linee_guida_riconoscimento_titoli_esteri_DdR.pdf.

Requisito fondamentale per avviare tale procedura interna è però l'emanazione di un apposito Regolamento, i cui tempi di approvazione rischiano tuttavia di vanificare la possibilità che il dott. Tassi prenda servizio in tempi utili per lo svolgimento della ricerca de qua, stanti anche i ritardi già accumulatisi nel corso dell'interlocuzione con il MUR. In accordo con l'Amministrazione, si è quindi stabilito di procedere, nelle more dell'approvazione del Regolamento di Ateneo per l'equipollenza dei titoli di dottorato di ricerca, ad un'approvazione dell'equivalenza del titolo al solo fine di consentire al dott. Tassi di poter prendere servizio.

In analogia con quanto già viene fatto per il riconoscimento dell'equipollenza sul titolo di laurea magistrale, è stato quindi chiesto al Collegio di Dottorato di Matematica e Modelli, competente per l'ambito disciplinare oggetto delle ricerche contenute nella tesi di dottorato, di formulare un parere in merito all'ipotizzata equivalenza. A supporto della formulazione di tale parere, sono stati prodotti dall'istante i seguenti documenti, che si allegano al presente verbale per formarne parte integrante:

- (i) Diploma di dottorato e attestazione di doppio titolo con Granada, Spagna, con relativa traduzione in italiano;
- (ii) Certificato di comparabilità del CIMEA attestante il livello del titolo prodotto e la sua validità legale all'interno del Paese che lo ha rilasciato;
- (iii) Certificato cronologico delle attività svolte durante il dottorato, con relativa traduzione in italiano;
- (iv) Tesi di dottorato;
- (v) Diploma di Master;
- (vi) Curriculum Vitae;

15.1 Equivalenza titolo di dottorato di ricerca estero finalizzata alla presa di servizio in qualità di assegnista di ricerca – dott. Marcos Paulo Tassi

(vii) Passaporto.

Il Collegio interpellato ha preso visione dei sopracitati documenti ed ha nominato una commissione composta dal Prof. Davide Gabrielli, dalla Prof.ssa Barbara Nelli, dal dott. Giuseppe Pipoli e dal dott. Salvatore Stella, che ha analizzato in maggiore dettaglio la documentazione con particolare riguardo alla tesi di dottorato. La commissione ha stabilito che i contenuti scientifici della tesi di Marcos Paulo Tassi sono attestati su uno standard di qualità comparabile con quello dei dottori di ricerca in Matematica e Modelli presso l'Università dell'Aquila, e conseguentemente il Collegio nella seduta telematica del 15.11.2022 ha espresso parere favorevole all'approvazione dell'equivalenza. Tale parere è stato acquisito agli atti del Dipartimento con Prot. n. 5144 del 15.11.2022.

Tutto ciò premesso, il Presidente invita il Consiglio ad esprimersi.

Il Consiglio,

VISTI gli esiti del Bando Repertorio n. 73/2022 Prot. n. 744 del 25.02.2022

VISTO il verbale del Collegio di Dottorato di Matematica e Modelli, seduta del 15 novembre 2022

ESAMINATA la documentazione prodotta dal dott. Marcos Paulo Tassi

UDITA la relazione del Presidente

PRESO ATTO della necessità di procedere con urgenza a deliberare sul punto in oggetto, al fine di consentire una rapida presa di servizio del dott. Marcos Paulo Tassi

all'unanimità/a maggioranza

delibera che il titolo di Doutor em Ciências em Matemática rilasciato in data 03.06.2020 dall'Universidade Federal de São Carlos (Brasile) al dott. Marco Paulo Tassi è equivalente ai fini della presa di servizio in qualità di assegnista di ricerca al titolo di Dottore di Ricerca in Matematica previsto nell'ordinamento universitario italiano.

La presente delibera viene approvata seduta stante per la parte dispositiva.



ufscar

**REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

A REITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS NO USO DE SUAS ATRIBUIÇÕES CONFERE A

MARCOS PAULO TASSI

NASCIDO A 19 DE AGOSTO DE 1991, NATURAL DA CIDADE DE SÃO CARLOS - SP,
NACIONALIDADE BRASILEIRA, RG Nº 48.382.628-5 SSP/SP, O PRESENTE DIPLOMA DE

DOUTOR EM CIÊNCIAS

TENDO EM VISTA QUE SATISFEZ TODAS AS EXIGÊNCIAS PERTINENTES A ESSE GRAU, ESTABELECIDAS
NAS NORMAS EM VIGOR PARA O **PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

SÃO CARLOS, 03 DE JUNHO DE 2020.

ufscar

PROFA. DRA. WANDA APARECIDA MACHADO HOFFMANN
REITORA

ufscar

PROFA. DRA. AUDREY BORGHI E SILVA
PRÓ-REITORA DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CAMPUS SÃO CARLOS

INTERESSADO: MARCOS PAULO TASSI

TÍTULO OBTIDO: DOUTOR EM CIÊNCIAS

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GEOMETRIA E TOPOLOGIA

CONCLUSÃO 20 DE DEZEMBRO DE 2019

SÃO CARLOS, 03 DE JUNHO DE 2020

HOMOLOGADO NA 119ª REUNIÃO DO COPG DE 27/05/2020

Reconhecido pela Port. MEC 609, de 14/03/2019
DOU de 18/03/2019

Universidade Federal de São Carlos
Recredenciamento Port.721-DOU de 09/08/2013
Edição 153-Seção 1- p. 21

Processo Nº. 547/20 743769
Diploma registrado sob Nº.

Por delegação de competência do Ministério da Educação, nos termos da Lei
9.394, publicada no Diário Oficial da União em 23 de dezembro de 1996.

São Carlos-SP 30 / 06 / 2020

Roseli Aparecida Francisco Barbosa
21abscar

Roseli Aparecida Francisco Barbosa
Coordenadora de Registro de Diplomas
Delegação Port. GR 3697 de 11/03/2019
Matrícula 6425030



2º TABELIÃO DE SÃO CARLOS/SP (16) 2107.4000

R. Matechal Deodoro, 2315, Centro - São Carlos/SP

Reconheço POR SEMELHANÇA a(s) firma(s):

[133u36V2] - WANDA APARECIDA MACHADO HOFFMANN
[133t08C4] - AUDREY BORDINI E SILVA
[133u51K2] - ROSELI APARECIDA FRANCISCO BARBOSA

São Carlos, 25/10/2021 (13:43:22) (valor e firma RS 6,77- x/vl. ec)

Em testemunho da verdade,
GIOVANI TIETRE DOS SANTOS - ESCRIVENTE

Valido somente com selo de autenticação

FIRMA 1 112813
S10976AA0336852

FIRMA 2 112813
S20976AA0074263

Giovani Tietre dos Santos
Escrivente

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CAMPUS SÃO CARLOS

INTERESSADO: MARCOS PAULO TASSI
TÍTULO OBTIDO: DOUTOR EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GEOMETRIA E TOPOLOGIA

CONCLUSÃO 20 DE DEZEMBRO DE 2019
SÃO CARLOS, 03 DE JUNHO DE 2020
HOMOLOGADO NA 119ª REUNIÃO DO COPG DE 27/05/2020

Reconhecido pela Port. MEC 609, de 14/03/2019
DOU de 18/03/2019

 CONSELHO NACIONAL DE JUSTIÇA BRASIL APOSTILLE (Convention de La Haye de 5 octobre 1961)		REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL Este documento público (This public document / Le présent acte public)	
1. País: (Country / Pays):			
2. Foi assinado por: (Has been signed by / A été signé par)		WANDA APARECIDA MACHADO HOFFMANN E AUDREY BORGHI E SILVA	
3. Na qualidade de: (Acting in the capacity of / Agissant en qualité de)		REITORA E PRÓ-REITORA DE PÓS-GRADUAÇÃO	
4. Tem o selo / carimbo de: (Bears the seal / stamp of / Est revêtu du sceau / timbre de)		SELO Nº S10976AA0336852 E S20976AA0074263	
Certificado (Certified / Attesté)			
5. Em: (At / À):	SAO CARLOS	6. No dia: (The / Le):	25/10/2021
7. Por: (By / Par):	Nayana Paula Lopes		
8. Nº: (Nº / Sous n°):	1323826-21		
9. Selo / Carimbo: (Seal / Stamp / Sceau / Timbre)			
10. Firma: (Signature)		Assinatura Eletrônica Electronic Signature Signature Electronique	

Diploma - DOUTOR EM CIÊNCIAS

MARCOS PAULO TASSI

Tipo de Documento:
(Type of document / Type d'acte)

Nome do titular:
(Name of holder of document / Nom du titulaire)

Esta Apostila certifica apenas a assinatura, a capacidade do signatário e, quando apropriado, o selo ou carimbo constantes no documento público. Ela não certifica o conteúdo do documento para o qual foi emitida.

This Apostille certifies only the signature, the capacity of the signatory and, where appropriate, the seal or stamp which the public document bears. It does not certify the content of the document for which it was issued.

Cette Apostille ne certifie que la signature, la qualité ou l'habilité du signataire de l'acte a été agi, et le sceau ou le timbre dont cet acte public est revêtu. Elle ne certifie pas le contenu de l'acte pour lequel elle a été émise.

A autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica, bem como o documento público subjacente, podem ser verificadas em:

The authenticity of this Apostille and its electronic signature, along with the underlying public document, may be verified at:

L'authenticité de cette Apostille, de la signature électronique, ainsi que de l'acte public sous-jacent peut être vérifiée sur:

A presente Apostila foi firmada com assinatura eletrônica, conforme a Lei nº 11.419/2006.

This Apostille was electronically signed in accordance with Law nº 11.419/2006.

Cette Apostille a été signée par une signature électronique, d'après la Loi nº 11.419/2006.

Dividida a respeito desta Apostila em duas partes, a primeira contém o CNJ, a segunda contém o CNJ.

Any questions about this Apostille may be directed to the Embassman of the CNJ.

Vous pouvez poser des questions relatives à cette Apostille.

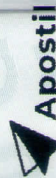
Por favor, utilize este QR Code para verificar a autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica. Uma cópia do documento público subjacente também está disponível na mesma página.

Please use this QR Code to check the authenticity of this Apostille and its electronic signature. A copy of the public document is also accessible from the same page.

Veuillez utiliser ce Code QR pour vérifier l'authenticité de cette Apostille et de sa signature électronique. Une copie de l'acte public sous-jacent est également disponible sur la même page.



Código (Code / Code)
1323826-21
CRC
BFA139D4



6123265353

apostil.cnj.jus.br/pt

sistemasmacionais@cnj.jus.br

1458506

BR 122762 001458506



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Universidad de Granada

Registro Electrónico	SALIDA
202277700019282	31/05/2022 - 14:13

Universidad de Granada

Nº de Notificación	867275
Fecha de Visionado	31/05/2022 - 15:42:40

RESGUARDO DEL ABONO DE LOS PRECIOS PÚBLICOS DEL TÍTULO DE DOCTOR

Don Marcos Paulo Tassi, de nacionalidad brasileña, con **PASAPORTE FS068952**, con fecha de nacimiento 19 de Agosto de 1991 en SÃO CARLOS, ha defendido su tesis doctoral el día 20 de Diciembre de 2019 superando los estudios conducentes a la obtención del título de **Doctor por la Universidad de Granada** dentro del **Programa de Doctorado en Matemáticas**.

El interesado ha abonado el día 8 de Abril de 2022 la cantidad de 200,2 Euros por los derechos de EXPEDICIÓN del citado título universitario oficial con validez en todo el territorio nacional.

Y para que surta los efectos que convenga, de acuerdo con lo previsto en el artículo 14c del Real Decreto 1002/2010 de 5 de Agosto, sobre expedición de títulos universitarios oficiales (BOE número 190 de 6 de Agosto), certifico en Granada a 31 de Mayo de 2022



Sello del Centro

MODESTO GARCÍA RUIZ

Nº de Resguardo : 10664

Firma (1): MODESTO GARCÍA RUIZ

En calidad de: Firmante



Este documento firmado digitalmente puede verificarse en <https://sede.ugr.es/verifirma/>
Código seguro de verificación (CSV): 6A851B8916E391B868A3EBEBD103263A

31/05/2022 - 14:08

Pág. 1 de 1



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.807

Pagina/Página: 1

Io, Sottoscritta, Carla Strambio, Traduttrice Pubblica Giurata e Interprete Commerciale, certifico che la traduzione fedele dal portoghese all'italiano di un documento che mi è stato presentato, è del tenore seguente:

[Stemma: ufSCar]

**REPPUBBLICA FEDERALE DEL BRASILE
MINISTERO DELL'ISTRUZIONE
UNIVERSITÀ FEDERALE DI SÃO CARLOS**

LA RETTRICE DELL'UNIVERSITÀ FEDERALE DI SÃO CARLOS NELL'USO DEI SUOI POTERI CONFERISCE A

MARCOS PAULO TASSI

NATO IL 19 AGOSTO 1991, ORIGINARIO DELLA CITTÀ DI SÃO CARLOS – SP [Stato di São Paulo], NAZIONALITÀ
BRASILIANA, RG [carta di identità] Nº 48.382.628-5 SSP/SP [Segreteria di Stato per la Pubblica Sicurezza - Governo dello Stato di
São Paulo], IL PRESENTE DIPLOMA DI

DOTTORE IN SCIENZE

TENUTO CONTO CHE HA SODDISFATTO TUTTI I REQUISITI RELATIVI AL PRESENTE GRADO DI LAUREA, STABILITI
NELLE NORME VIGENTI PER IL CORSO DI **POST-LAUREA IN MATEMATICA**.

SÃO CARLOS, 03 GIUGNO DEL 2020.

[Firma]

[Timbro riconoscimento firma]

PROF.SSA DOTT.SSA WANDA APARECIDA
MACHADO HOFFMANN
RETTRICE

[Firma]

[Timbro riconoscimento firma]

PROF.SSA DOTT.SSA AUDREY BORGHI E SILVA
PRO-RETTRICE DI POST-LAUREA

[Sul retro:]

**PROGRAMMA DI POST-LAUREA IN
MATEMATICA CAMPUS DI SÃO CARLOS**

INTERESSATO: MARCOS PAULO TASSI
TITOLO OTTENUTO: DOTTORE IN SCIENZE
AREA DI CONCENTRAZIONE: GEOMETRIA E
TOPOLOGIA

CONCLUSIONE 20 DICEMBRE DEL 2019
SÃO CARLOS, 03 GIUGNO DEL 2020
APPROVATO NALLE 119ª RIUNIONE DEL
CONSIGLIO DI POST-LAUREA – COPG DEL
27/05/2020

Riconosciuto dell'Ordinanza MEC [Ministero
dell'Istruzione] 609, del 14/03/2019
DOU [Gazzetta Ufficiale dell'Unione] del 18/03/2019

UNIVERSITÀ FEDERALE DI SÃO CARLOS

Riaccreditamento Ordinanza 721 – DOU [Gazzetta
Ufficiale dell'Unione] del 09/08/2013
Edizione 153-Sezione 1- pag. 21

Processo Nº 547/20
Diploma registrato sotto il Nº 743769
Per delega di competenza del Ministero dell'Istruzione, ai
sensi della Legge 9.394, pubblicata sulla Gazzetta Ufficiale
dell'Unione il 23 dicembre 1996.
São Carlos-SP [Stato di São Paulo] 30 / 06/ 2020

[Firma]

[Timbro riconoscimento firma]

Roseli Aparecida Francisco Barbosa
Coordinatrice dell'Ufficio Diplomi
Delegazione Ordinanza GR [Mance di rappresentanza]
dell'11/03/2019
Matricola 6425030

[Si verifica l'Autenticazione delle firme di WANDA APARECIDA MACHADO HOFFMANN, AUDREY BORGHI E SILVA, E ROSELI APARECIDA FRANCISCO BARBOSA dall'Ufficio di São Carlos, firmata (firma) da Giovani Tietre dos Santos – Scrivano, codici dei bolli di autenticazione: [firma 1] S10976AA0336852 [Firma 2] S20976AA0074263 – Codice QR, datata del 25 ottobre 2021.]

[Apostille rilasciata dal Consiglio Nazionale di Giustizia (CNJ), certificando l'autenticità del Diploma – Dottore in Scienze di Marcos Paulo Tassi rilasciato dalla RETTRICE E PRO-RETTRICE DI POST-LAUREA, firmato da WANDA APARECIDA MACHADO HOFFMANN E AUDREY BORGHI E SILVA e certificato da NAYANA PAULA LOPES, il 25 ottobre 2021. Certificazione n.: 1323826-21].



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.807

Pagina/Página: 2

NULL'ALTRO. È una traduzione in conformità con l'originale. Ne do fede.

São Paulo, il 24 luglio 2022.



Carla Strambio
Carla Strambio
Tradutora Pública Juramentada

**CNJ**CONSELHO
NACIONAL
DE JUSTIÇA**BRASIL**

APOSTILLE

(Convention de La Haye de 5 octobre 1961)

1. País:

(Country / Pays):

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL

Este documento público

(This public document / Le présent acte public)

2. Foi assinado por:

(Has been signed by / A été signé par)

CARLA STRAMBIO

3. Na qualidade de:

(Acting in the capacity of / Agissant en qualité de)

TRADUTORA PÚBLICA JURAMENTADA

4. Tem o selo / carimbo de:

(Bears the seal / stamp of / Est revêtu du sceau / timbre de)

SELO Nº S11048AA0949990

Certificado

(Certified / Attesté)

5. Em:

(At / À):

SÃO CARLOS

6. No dia:

(The / Le):

01/08/2022

7. Por:

(By / Par):

Mariane Serato de Oliveira

8. Nº:

(Nº / Sous n°):

1416948-22

9. Selo / Carimbo:

(Seal / Stamp / Sceau / Timbre)



10. Firma:

(Signature)

Assinatura Eletrônica

Electronic Signature

Signature Électronique

Tipo de Documento:

(Type of document / Type d'acte)

**TRADUÇÃO DO DIPLOMA DOUTOR EM CIÊNCIAS PARA
O IDIOMA ITALIANO**

Nome do titular:

(Name of holder of document / Nom du titulaire)

MARCOS PAULO TASSI

Esta Apostila certifica apenas a assinatura, a capacidade do signatário e, quando apropriado, o selo ou carimbo constantes no documento público. Ela não certifica o conteúdo do documento para o qual foi emitida.

This Apostille certifies only the signature, the capacity of the person signing it and where appropriate, the seal or stamp which the public document bears. It does not certify the content of the document for which it was issued.

Cette Apostille ne certifie que la signature, la qualité en laquelle le signataire de l'acte a agi, et, le cas échéant, le sceau ou le timbre dont cet acte public est revêtu. Elle ne certifie pas le contenu de l'acte pour lequel elle a été émise.

A autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica bem como o documento público subjacente, podem ser verificadas em:

The authenticity of this Apostille and its electronic signature, along with the underlying public document, may be verified at:

L'authenticité de cette Apostille, de la signature électronique, ainsi que de l'acte public sous-jacent peut être vérifiée sur:

<https://apostil.org.br>

A presente Apostila foi firmada com assinatura eletrônica, conforme a Lei nº 11.419/2006.

This Apostille was electronically signed in accordance with Law nº 11.419/2006.

Cette Apostille a été signée par une signature électronique, d'après la Loi nº 11.419/2006.

Dévidas a respeito desta Apostila entrar em contato com a Ouvidoria do CNJ:

Any questions about this Apostille may be directed to the Ombudsman of the CNJ:

Veuillez contacter l'Ombudsman de la CNJ pour toute question relative à cette Apostille:

(61) 3772-7800

servicos@notariado.org.br

Por favor, utilize este QR Code para checar a autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica. Uma cópia do documento público subjacente também está disponível na mesma página.

Please use this QR Code to check the authenticity of this Apostille and its electronic signature. A copy of the underlying public document is also accessible from the same page.

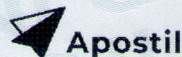
Veuillez utiliser ce Code QR pour vérifier l'authenticité de cette Apostille et de sa signature électronique. Une copie de l'acte public sous-jacent est également disponible sur la même page.



Código (Code / Code)

1416948-22

CRC

5D1DFF96

459048

BR 122762 001459048

ATTESTATO di COMPARABILITÀ

REFERENCE N. 6310e3e8b8b1d15d4e7ac42a

DATA 24/10/2022

CARATTERISTICHE DEL TITOLO DI STUDIO

NOME DEL POSSESSORE:	Marcos Paulo TASSI
DATA DI NASCITA:	19-08-1991
NOME DELLA QUALIFICA:	Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Matemática
ANNO DI RILASCIO:	2020
PAESE DI RILASCIO:	Brasile
ISTITUZIONE CHE HA RILASCIATO IL TITOLO:	Universidade Federal de São Carlos
STATUS DELL'ISTITUZIONE:	Riconosciuta
NATURA DELLA QUALIFICA:	Titolo accademico
CLASSIFICAZIONE/LIVELLO:	3° ciclo QF-EHEA / livello 8 EQF

NOTE VALUTATIVE:

Il Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Matemática è titolo finale di terzo ciclo del sistema di formazione superiore brasiliano. Tale qualifica in Italia è comparabile per livello a un Dottorato di Ricerca.

Il presente Attestato è redatto dal **CIMEA**, centro nazionale di informazione afferente alla rete **NARIC - National Academic Recognition Information Centres** dell'Unione Europea e alla rete **ENIC - European National Information Centres** del Consiglio d'Europa e dell'UNESCO - Regione Europea. Il presente Attestato ha la forma di parere non vincolante e non certifica né attesta l'autenticità della qualifica oggetto della valutazione.



Nella produzione delle proprie attestazioni, il CIMEA si avvale della tecnologia blockchain collegata al servizio diplome.

Per "comparabilità" si intende l'indicazione del livello del titolo in riferimento ai cicli del Processo di Bologna e ai livelli dell'European Qualifications Framework. Tale comparazione non sancisce in alcun modo il riconoscimento formale del titolo all'interno di un sistema di istruzione differente da quello del Paese di rilascio del titolo, ma è indicazione utile per le istituzioni e gli enti chiamati a valutare la qualifica durante le differenti procedure di riconoscimento: l'Attestato di comparabilità ha la forma di parere e non vincola in alcun modo le istituzioni durante le proprie procedure di valutazione e di riconoscimento.

**Servizio rapido di
verifica Diplome**

CLICCA QUI

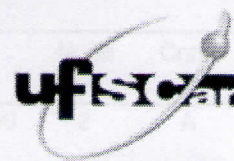
Questo servizio è disponibile
dopo 7 giorni dalla data
di rilascio dell'Attestato.



Universidade Federal de São Carlos

Pró-Reitoria de Pós-Graduação

Histórico Escolar Completo



Programa de Pós-Graduação em Matemática

Área de Concentração: Geometria e Topologia

Nível do Curso: Doutorado

Último Credenciamento: Port. MEC 609, de 14/03/2019

Aluno(a): **MARCOS PAULO TASSI**

Filiação: João Pedro Tassi e Denize Carducci Tassi

Local de Nascimento: São Carlos - SP

Data de Nascimento: 19/08/1991

CPF: 39201183836

Graduação na Instituição: Universidade Federal de São Carlos

Curso: Bacharelado em Matemática

Ano: 2013

Pós-Graduação na Instituição: Universidade Federal de São Carlos

Nível / Curso: Mestrado em Matemática

Ano: 2015

Data da matrícula: 13/03/2015

Sujeito ao Regimento Interno aprovado pela CoPG, 61.ª reunião, 10/09/2014

Orientador(a): Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

Bolsa de Estudo: CAPES/PICME (01/03/2015 a 28/02/2019)

Exame de Qualificação: Exame(s) escrito(s): 04/03/2016 - Análise 29/02/2016 - Geometria e Topologia

Exame(s) oral(is): 15/02/2019

Exame de Proficiência: 18/03/2016 - Idioma: Inglês

Data da Defesa da Tese: 20/12/2019

Título da Tese: "PSEUDO-PARALLEL IMMERSIONS IN $S^N \times R$ AND $H^N \times R$, AND CONSTANT ANISOTROPIC MEAN CURVATURE SURFACES IN R^3 "

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

Nome:

Instituição:

Avaliação:

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

UFSCar

A

Prof. Dr. Jose Nazareno Vieira Gomes

UFAM

A

Prof. Dr. Maria Magdalena Rodríguez Pérez

UGR

A

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior

ICMC/USP

A

Prof. Dr. João Paulo dos Santos

UnB

A



ATENÇÃO Este é um documento oficial da Pro-Reitoria de pós-graduação da UFSCar e está isento de carimbo e assinatura.

Código:

Documento emitido às 13:36 horas do dia 07/12/2020 (hora e data de Brasília)

BTO5-P6XI-MS32-698C

A autenticidade pode ser verificada em: <http://propgweb.ufscar.br/ProPGWeb/ValidarDocumento.do>

APROVEITAMENTO

Código / Disciplina / Tipo do Aluno	Car.	Sem.	Ano	Fr. (%)	N. de Cr.	Conc.
MAT.400 / Estágio Supervisionado de Capacitação Docente em Matemática / R	OP	1	2014	100.00	2	A
Aprovado na Reunião 4.a de 11/03/2016						
MAT.251 / Análise Real / R	OP	1	2015	100.00	10	A
MAT.156 / Topologia Algébrica / R	O	1	2015	100.00	10	A
MAT.154 / Topologia Diferencial / R	OP	1	2015	100.00	10	A
MAT.254 / Análise Funcional / R	O	2	2015	100.00	10	A
MAT.160 / Geometria das Variedades / R	O	2	2015	100.00	10	A
MAT.401 / Estágio Supervisionado de Capacitação Docente em Matemática 2 / R	OP	1	2016	100.00	2	A
MAT.314 / Tópicos de Teoria das Subvariedades / R	OP	1	2016	100.00	10	A
MAT.275 / Tópicos de Geometria das Subvariedades 2 / R	OP	2	2016	100.00	10	A
Defesa de Tese	-	2	2019	-	130	-
Créditos Reconhecidos: 0			Aprovados na 0 a. Reunião			
					Total de Créditos:	204
					Rendimento Médio:	4.00

Informações suplementares:

Períodos de trancamento de matrícula (data e reunião CPG): Não houve trancamentos de matrícula.

Períodos como aluno especial: Não houve períodos como aluno especial.

Prorrogações de prazo: Não houve prorrogações de prazo.

Caráter da Disciplina: O (Obrigatória), AC (Área de Concentração), OP (Optativa)

Tipo do Aluno: R = Aluno Regular, AE = Aluno Especial, AV = Aluno Visitante, T = Transferência

Avaliações: A = Excelente, B = Bom, C = Regular, D = Insuficiente, E = Reprovado (A, B e C com direito a crédito)

Créditos mínimos em disciplinas: 70 (Tese: 130)

1 crédito = 15 horas de atividade

Rendimento médio: de zero a 4,0

Aluno(a): Marcos Paulo Tassi

Nível: Doutorado - Programa: PPGM



Homologado na 119ª. Reunião do CoPG de 27/05/2020

ATENÇÃO Este é um documento oficial da Pró-Reitoria de pós-graduação da UFSCar e está isento de carimbo e assinatura.

Código: BT05-P6XI-MS32-698C	Documento emitido às 13:36 horas do dia 07/12/2020 (hora e data de Brasília) A autenticidade pode ser verificada em: http://propgweb.ufscar.br/ProPGWeb/ValidarDocumento.do
---------------------------------------	---

**CNJ**CONSELHO
NACIONAL
DE JUSTIÇA**BRASIL**

APOSTILLE

(Convention de La Haye de 5 octobre 1961)

1. País:

(Country / Pays):

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL

Este documento público

(This public document / Le présent acte public)

2. Foi assinado por:

(Has been signed by / A été signé par)

NAYANA PAULA LOPES GOBATO

3. Na qualidade de:

(Acting in the capacity of / Agissant en qualité de)

ESCREVENTE AUTORIZADA DO REG.
CIVIL 2º SUBDISTRITO DE SÃO CARLOS SP

4. Tem o selo / carimbo de:

(Bears the seal / stamp of / Est revêtu du sceau / timbre de)

SELO Nº AU0977AB0520363 E
AU0977AB0520364

Certificado

(Certified / Attesté)

5. Em:

(At / À):

SÃO CARLOS

6. No dia:

(The / Le):

20/07/2022

7. Por:

(By / Par):

Mariane Serato de Oliveira

8. Nº:

(Nº / Sous nº):

1332248-22

9. Selo / Carimbo:

(Seal / Stamp / Sceau / Timbre)



10. Firma:

(Signature)

Assinatura Eletrônica

Electronic Signature

Signature Électronique

Tipo de Documento:

(Type of document / Type d'acte)

HISTÓRICO ESCOLAR COMPLETO UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SÃO CARLOS

Nome do titular:

(Name of holder of document / Nom du titulaire)

MARCOS PAULO TASSI

Esta Apostila certifica apenas a assinatura, a capacidade do signatário e, quando apropriado, o selo ou carimbo constantes no documento público. Ela não certifica o conteúdo do documento para o qual foi emitida.

This Apostille certifies only the signature, the capacity of the person signing it and where appropriate, the seal or stamp which the public document bears. It does not certify the content of the document for which it was issued.

Cette Apostille ne certifie que la signature, la qualité en laquelle le signataire de l'acte a agi, et, le cas échéant, les sceaux ou le timbre dont cet acte public est revêtu. Elle ne certifie pas le contenu de l'acte pour lequel elle a été émise.

A autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica bem como o documento público subjacente, podem ser verificadas em:

The authenticity of this Apostille and its electronic signature, along with the underlying public document, may be verified at:

L'authenticité de cette Apostille, de la signature électronique, ainsi que de l'acte public sous-jacent peut être vérifiée sur:

<https://apostil.org.br>

A presente Apostila foi firmada com assinatura eletrônica, conforme a Lei nº 11.419/2006.

This Apostille was electronically signed in accordance with Law nº 11.419/2006.

Cette Apostille a été signée par une signature électronique, d'après la Loi nº 11.419/2006.

Dúvidas a respeito desta Apostila entrar em contato com a Ouvidoria do CNJ:

Any questions about this Apostille may be directed to the Ombudsman of the CNJ:

Veuillez contacter l'Ombudsman de la CNJ pour toute question relative à cette Apostille:

(61) 3772-7800

servicos@notariado.org.br

Por favor, utilize este QR Code para checar a autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica. Uma cópia do documento público subjacente também está disponível na mesma página.

Please use this QR Code to check the authenticity of this Apostille and its electronic signature. A copy of the underlying public document is also accessible from the same page.

Veuillez utiliser ce Code QR pour vérifier l'authenticité de cette Apostille et de sa signature électronique. Une copie de l'acte public sous-jacent est également disponible sur la même page.



Código (Code / Code)

1332248-22

CRC

E4A9E37A

**Apostil**

459035

BR 122762 001459035





REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.806

Pagina/Página: 1

Io, Sottoscritta, Carla Strambio, Traduttrice Pubblica Giurata e Interprete Commerciale, certifico che la traduzione fedele dal portoghese all'italiano di un documento che mi è stato presentato, è del tenore seguente:

[Stemma: ufSCar]

[Stemma: Repubblica Federale del Brasile]

**UNIVERSITÀ FEDERALE DI SÃO CARLOS
PRO-RETTORICE DI POST-LAUREA
REGISTRO SCOLASTICO COMPLETO**

Programma di Post-Laurea in Matematica
Area di Concentrazione: Geometria e Topologia
Livello del Corso: Dottorato
Ultimo Accreditamento: Ordinanza MEC [Ministero dell'Istruzione] 609, del 14/03/2019
Alunno (a): **MARCOS PAULO TASSI**

Filiazione: João Pedro Tassi e Denize Carducci Tassi
Luogo di Nascita: São Carlos – SP [Stato di São Paulo]
Data di Nascita: 19/08/1991
CPF [Codice Fiscale]: 39201183836
Laurea presso l'Istituzione: Università Federale di São Carlos
Corso: Laurea Triennale in Matematica
Post-Laurea presso l'Istituzione: Università Federale di São Carlos
Livello / Corso: Laurea Magistrale in Matematica

Anno: 2013

Anno: 2015

Data della matricola: 13/03/2015
Soggetto a Reggimento Interno approvato dal CoPG [Pro-Rettorato degli Studi Universitari presso UFSCar], 61.^a riunione, 10/09/2014
Relatore: Prof. Dott. Guillermo Antonio Lobos Villagra

Borsa di Studio: CAPES [Il Coordinamento per il miglioramento del personale dell'istruzione superiore] / PICME [Iniziazione scientifica e programma di master] (01/03/2015 a 28/02/2019)

Esame di Qualifica: Esame(i) scritto(i): 04/03/2016 – Analisi 29/02/2016 – Geometria e Topologia
Esame(i) orale(i): 15/02/2019

Esame di Competenza: 18/03/2016 – Lingua: Inglese

Data della Difesa della Tesi: 20/12/2019

Titolo della Tesi: "PSEUDO-PARALLEL IMMERSIONS IN $S^N \times R$ AND $H^N \times R$, AND CONSTANT ANISOTROPIC MEAN CURVATURE SURFACES IN R^3 "

COMPOSIZIONE DELLA COMMISSIONE D'ESAME

Nome:	Istituzione:	Valutazione:
Prof. Dott. Guillermo Antonio Lobos Villagra	UFSCar	A
Prof. Dott. Jose Nazareno Vieira Gomes	UFAM	A
Prof. Dott.ssa Maria Magdalena Rodríguez Pérez	UGR	A
Prof. Dott. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior	ICMC/USP	A
Prof. Dott. João Paulo dos Santos	UnB	A

[Si verifica l'Autenticazione della Copia reprografica certificando l'autenticità della copia del documento originale dall'Ufficio di Stato Civile delle Persone Naturali del 2° Sottodistretto di São Carlos / SP (Stato di São Paulo), firmata (firma)]



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.806

Pagina/Página: 2

da NAYANA PAULA LOPES GOBATO – codice del bollo di autenticazione: AU0977AB0520363 – Codice QR, datata del 20/07/2022.]

ATTENZIONE: Questo è un documento ufficiale del Pro-Rettorato di Post-Laurea dell'UFSCar [Università Federale di São Carlos] ed è esento da timbro e firma.

Codice:

Documento emesso alle ore 13:36 del giorno 07/12/2020 (ora e data di Brasília)

BT05-P6XI-MS32-698C

L'autenticità può essere verificata su: <http://propgweb.ufscar.br/ProPGWeb/ValidarDocumento.do>

Pagina 1

UTILIZZAZIONE

Codice/Materia/ Tipo di Studente	Car.	Sem.	Anno	Fr. (%)	N.de Cr.	Conc.
MAT.400 / Tirocinio di Formazione per Insegnati Supervisionato in Matematica / R	OP	1	2014	100.00	2	A
Approvato nella Riunione 4ª dell'11/03/2016	OP	1	2015	100.00	10	A
MAT.251 / Analisi Reale / R						
MAT. 156 / Topologia Algebrica / R	O	1	2015	100.00	10	A
MAT.154 / Topologia Differenziale / R	OP	1	2015	100.00	10	A
MAT. 254 / Analisi Funzionale / R	O	2	2015	100.00	10	A
MAT. 160 / Geometria delle Varietà / R	O	2	2015	100.00	10	A
MAT. 401 / Tirocinio di Formazione per Insegnati Supervisionato in Matematica 2 / R	OP	1	2016	100.00	2	A
MAT.314 / Temi di Teoria delle Sottovarietà / R	OP	1	2016	100.00	10	A
MAT. 275 / Temi di Geometria delle Sottovarietà 2 / R	OP	2	2016	100.00	10	A
Difesa di Tesi	-	2	2019		130	-
Crediti Riconosciuti: 0 Approvati nella 0ª Riunione						
						Totale dei crediti: 204
						Rendimento medio: 4.00

Informazioni supplementari:

Periodo di recesso dell'immatricolazione (data e riunione CPG [Consiglio Post-Laurea]): Non c'è stata alcuna cancellazione dell'immatricolazione.

Periodi come alunno speciale: Non ci sono stato periodi da alunno speciale.

Proroghe di scadenza: Non ci sono state proroghe di scadenza.



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.806

Pagina/Página: 3

Carattere disciplinare: O (Obbligatorio), AC (Area di Concentrazione), OP (Opzionale)

Tipo di Studente: R = Alunno Regolare, AE = Alunno Speciale, AV = Alunno Visitatore, T = Trasferimento

Valutazioni: A = Eccellente, B = Buono, C = Regolare, D = Insufficiente, E = Non Ammesso (A, B e C con diritto a credito)

Crediti minimi in materie: 70 (Tesi: 130)

1 credito = 15 ore di attività

Rendimento medio: da zero a 4,0

Alunno (a): Marcos Paulo Tassi

Livello: Dottorato – Programma: PPGM [Corso di Post-Laurea in Matematica]

[Si verifica l'Autenticazione della Copia reprografica certificando l'autenticità della copia del documento originale dall'Ufficio di Stato Civile delle Persone Naturali del 2° Sottodistretto di São Carlos / SP (Stato di São Paulo), firmata (firma) da NAYANA PAULA LOPES GOBATO – codice del bollo di autenticazione: AU0977AB0520364 – Codice QR, datata del 20/07/2022.]

Approvato nella 119ª Riunione del CoPG
[Consiglio Post-Laurea] del 27/05/2020

ATTENZIONE: Questo è un documento ufficiale del Pro-Rettorato di Post-Laurea dell'UFSCar [Università Federale di São Carlos] ed è esento da timbro e firma.

Codice:

Documento emesso alle ore 13:36 del giorno 07/12/2020 (ora e data di Brasília)

BT05-P6XI-MS32-698C

L'autenticità può essere verificata su: <http://propgweb.ufscar.br/ProPGWeb/ValidarDocumento.do>

Pagina 2

[Sul retro:]

[Apostille rilasciata dal Consiglio Nazionale di Giustizia (CNJ), certificando l'autenticità del Registro Scolastico Completo dell'Università di São Carlos di Marcos Paulo Tassi rilasciato dalla SCRIVANA AUTORIZZATA dell'Ufficio di Stato Civile 2° Sottodistretto di São Carlos, firmato da NAYANA PAULA LOPES GOBATO e certificato da MARIANE SERATO DE OLIVEIRA, il 20 luglio 2022. Certificazione n.: 1332248-22.]



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
ESTADO DE SÃO PAULO

CARLA STRAMBIO

Tradutora Pública Juramentada e Intérprete Comercial
Italiano e Francês

Reg. JUCESP nº 479 | CPF: 041.730.828-00 | C.C.M nº Sto. André 026.960-2 | I.A.P.A.S. nº 1.105.85634-02

Traduzione/Tradução n. 100.806

Pagina/Página: 4

NULL'ALTRO. È una traduzione in conformità con l'originale. Ne do fede.

São Paulo, il 24 luglio 2022.



Carla Strambio
Carla Strambio
Tradutora Pública Juramentada



CNJ CONSELHO
NACIONAL
DE JUSTIÇA

BRASIL

APOSTILLE

(Convention de La Haye de 5 octobre 1961)

1. País: (Country / Pays):	REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL		
Este documento público (This public document / Le présent acte public)			
2. Foi assinado por: (Has been signed by / A été signé par)	CARLA STRAMBIO		
3. Na qualidade de: (Acting in the capacity of / Agissant en qualité de)	TRADUTORA PÚBLICA JURAMENTADA		
4. Tem o selo / carimbo de: (Bears the seal / stamp of / Est revêtu du sceau / timbre de)	SELO Nº SI1048AA0949991		
Certificado (Certified / Attesté)			
5. Em: (At / À):	SÃO CARLOS	6. No dia: (The / Le):	01/08/2022
7. Por: (By / Par):	Mariane Serato de Oliveira		
8. Nº: (Nº / Sous n°):	1417019-22		
9. Selo / Carimbo: (Seal / Stamp / Sceau / Timbre)	10. Firma: (Signature)		
	Assinatura Eletrônica Electronic Signature Signature Électronique		

Tipo de Documento:

(Type of document / Type d'acte)

TRADUÇÃO DO HISTÓRICO ESCOLAR COMPLETO
PARA O IDIOMA ITALIANO

Nome do titular:

(Name of holder of document / Nom du titulaire)

MARCOS PAULO TASSI

Esta Apostila certifica apenas a assinatura, a capacidade do signatário e, quando apropriado, o selo ou carimbo constantes no documento público. Ela não certifica o conteúdo do documento para o qual foi emitida.

This Apostille certifies only the signature, the capacity of the person signing it and where appropriate, the seal or stamp which the public document bears. It does not certify the content of the document for which it was issued.

Cette Apostille ne certifie que la signature, la qualité en laquelle le signataire de l'acte a agi, et, le cas échéant, les sceau ou le timbre dont cet acte public est revêtu. Elle ne certifie pas le contenu de l'acte pour lequel elle a été émise.

A autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica bem como o documento público subjacente, podem ser verificadas em:

The authenticity of this Apostille and its electronic signature, along with the underlying public document, may be verified at:

L'authenticité de cette Apostille, de la signature électronique, ainsi que de l'acte public sous-jacent peut être vérifiée sur:

A presente Apostila foi firmada com assinatura eletrônica, conforme a Lei nº 11.419/2006.

This Apostille was electronically signed in accordance with Law nº 11.419/2006.

Cette Apostille a été signée par une signature électronique, d'après la Loi nº 11.419/2006.

Dúvidas a respeito desta Apostila entrar em contato com a Ouvidoria do CNJ:

Any questions about this Apostille may be directed to the Ombudsman of the CNJ:

Veuillez contacter l'Ombudsman de la CNJ pour toute question relative à cette Apostille:

(61) 3772-7800

servicos@notariado.org.br

Por favor, utilize este QR Code para checar a autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica. Uma cópia do documento público subjacente também está disponível na mesma página.

Please use this QR Code to check the authenticity of this Apostille and its electronic signature. A copy of the underlying public document is also accessible from the same page.

Veuillez utiliser ce Code QR pour vérifier l'authenticité de cette Apostille et de sa signature électronique. Une copie de l'acte public sous-jacent est également disponible sur la même page.



Código (Code / Code)

1417019-22

CRC

60531874



<https://apostil.org.br>

459047

BR 122762 001459047



Universidade Federal de São Carlos
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Universidad de Granada
Programa de Doctorado en Matemáticas

Pseudo-parallel immersions in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, and constant anisotropic mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$

Marcos Paulo Tassi

Advisor: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
Advisor: Prof. Dr. José Antonio Gálvez López

São Carlos - SP, Brazil
February 11, 2020



Universidade Federal de São Carlos
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Universidad de Granada
Programa de Doctorado en Matemáticas

Pseudo-parallel immersions in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, and constant anisotropic mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$

Marcos Paulo Tassi

Dissertation submitted to the Graduate Program in Mathematics of Federal University of São Carlos and to the Doctorate Program in Mathematics of University of Granada as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science.

This version contains the corrections and modifications suggested by the doctoral committee during the dissertation defense on December 20, 2019.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Advisor: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
Advisor: Prof. Dr. José Antonio Gálvez López

São Carlos - SP, Brazil
February 11, 2020

El doctorando / The *doctoral candidate* [**Marcos Paulo Tassi**] y los directores de la tesis / and the thesis supervisor/s: [**Guillermo Antonio Lobos Villagra y José Antonio Gálvez López**]

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

/

Guarantee, by signing this doctoral thesis, that the work has been done by the doctoral candidate under the direction of the thesis supervisor/s and, as far as our knowledge reaches, in the performance of the work, the rights of other authors to be cited (when their results or publications have been used) have been respected.

Lugar y fecha / Place and date:

Granada, 21 de octubre de 2019

Director/es de la Tesis / *Thesis supervisor/s*;

Doctorando / *Doctoral candidate*:



Firma / Signed
Guillermo Antonio Lobos Villagra



Firma / Signed
Marcos Paulo Tassi



Firma / Signed
José Antonio Gálvez López



Via do Celmo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Marcos Paulo Tassi, realizada em 20/12/2019:

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra
UFSCar

Prof. Dr. Jose Nazareno Vieira Gomes
UFAM

Prof. Dr. Maria Magdalena Rodríguez Pérez
UGR

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior
ICMC/USP

Prof. Dr. João Paulo dos Santos
UnB

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Maria Magdalena Rodríguez Pérez e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ão) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

To the memory of my beloved mother, Denize.

Acknowledgements

At first, I would like to thank my father, João Pedro, who gave me all the support during my life, and for whom I have great admiration. I also thank Rosí, Ana Paula, Rogério, Jhuliane, João Victor, Fernando, Raquel, Yasmin, Ana, Beto, Djalma, Felipe, Mariana, Caio, Daniela, Pedro, Aninha, Pedrinho, Marta, Luiz and my other family members for their love and affection over the years.

I am very grateful to Professor Guillermo Lobos for his advisorship, for his patience and encouragement, the many opportunities he has given me and for all the years we have worked together.

I also would like to express my deep gratitude to Professor José Gálvez, for sharing his knowledge, for helping me promptly when I needed, for his valuable advices, for his support towards my formation and for his friendship.

I am grateful to Professor Ruy Tojeiro for his advices during the preparation of my first article, to Professor Alvaro Yucra Hanco for his collaboration in my second article, and to Professor Pablo Mira for his help and contribution in the developing of our article in Spain together with Professor Gálvez. I also thank all the teachers who contributed with my formation, in special Professor Ires Dias and Professor Sérgio Zani that, through OBMEP meetings on Saturdays, inspired me to study mathematics.

I would like to thank Professors João Paulo dos Santos, José Nazareno and Magdalena Rodríguez for accepting to be members of my thesis committee and to contribute with valuable suggestions to the final version of this thesis.

Thanks to my friends at UFSCar, especially Ronaldo, Rodrigo, Renata, Renan, Igor, Francisco, Flávia, Jéssica, Rafaela, Eric, Carlos, Cristiano, Amanda Feltrin, Mariane, Amanda Ferreira, Patrícia, Diana, Mynor, Alex, Gustavo, Priscila, my friends of Soccer on Tuesdays, all my other friends at UFSCar and also those friends I met in Spain, especially Doris, Eddygledson, Asun, Fátima, Beatriz, José Torres, Ángela, Gabriel, Rodrigo, Manolo, Fernanda, Maria José, Alejandro, Mohamed and my friends of Comunidade Shalom, in Granada. Thanks to all of them for the good times we had together.

This work had the indispensable financial support of CAPES, Grant No. 88881.133043/2016-01, for which I am genuinely grateful.

Abstract

In this Ph.D. thesis, we investigate two topics in Differential Geometry. The first topic refers to the study of pseudo-parallel submanifolds in the ambient spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. We complete the partial classification given by F. Lin and B. Yang. As a consequence, we classify minimal and constant mean curvature pseudo-parallel hypersurfaces. We also prove a characterization of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, for $n \geq 4$, and the non-existence of pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature, when $n = 3$.

The second part of the thesis is devoted to the study of constant anisotropic mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$. We obtain a Bernstein-type Theorem for multigraphs with constant anisotropic mean curvature, an anisotropic version of a theorem proved by D. Hoffman, R. Osserman and R. Schoen, in 1982. As a consequence, we prove that complete surfaces with non-zero constant anisotropic mean curvature and whose Gaussian curvature does not change sign are either the Wulff shape or cylinders. We prove uniform height estimates for vertical graphs with non-zero constant anisotropic mean curvature and planar boundary, a generalization of the theorem proved by W. Meeks, in 1988, and we obtain uniform height estimates for compact embedded surfaces with non-zero constant anisotropic mean curvature and planar boundary, as a corollary. We also prove, under certain symmetry hypothesis on the anisotropy function, the non-existence of properly embedded surfaces in $\mathbb{R}^3$ with non-zero constant anisotropic mean curvature and with just one end.

Resumen

En esta tesis doctoral, investigamos dos tópicos en Geometría Diferencial. El primer tópico se refiere al estudio de subvariedades pseudo-paralelas en los espacios producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Completamos la clasificación parcial dada por F. Lin y B. Yang. Como consecuencia, clasificamos las hipersuperficies pseudo-paralelas minimales y con curvatura media constante. También probamos una caracterización de las superficies pseudo-paralelas en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, cuando $n \geq 4$, y la no existencia de superficies pseudo-paralelas con curvatura normal que no se anula, cuando $n = 3$.

La segunda parte de la tesis está dedicada al estudio de las superficies de curvatura media anisotrópica constante en $\mathbb{R}^3$. Obtenemos un Teorema tipo-Bernstein para multigrafos con curvatura media anisotrópica constante, una versión anisotrópica de un teorema probado por D. Hoffman, R. Osserman y R. Schoen, en 1982. Como consecuencia, demostramos que las superficies completas con curvatura media anisotrópica constante no nula y cuya curvatura gaussiana no cambia de signo son o bien la forma de Wulff o bien cilindros. Probamos acotaciones uniformes de altura para grafos verticales con curvatura media anisotrópica constante no nula y borde plano, una generalización del

teorema probado por W. Meeks, en 1988, y obtenemos acotaciones uniformes de altura para superficies compactas embebidas con curvatura media anisotrópica constante no nula y borde plano, como un corolario. También demostramos, bajo ciertas hipótesis de simetría en la función de anisotropía, que no hay superficies propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media anisotrópica constante no nula y con solo un final.

Resumo

Nesta tese de doutorado, investigamos dois tópicos em geometria diferencial. O primeiro tópico se refere ao estudo das subvariedades pseudo-paralelas nos espaços ambientes $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Completamos a classificação parcial dada por F. Lin e B. Yang. Como consequência, classificamos as hipersuperfícies pseudo-paralelas mínimas e com curvatura média constante. Também provamos uma caracterização das superfícies pseudo-paralelas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, quando $n \geq 4$, e a não existência de superfícies pseudo-paralelas com curvatura normal que não se anula, quando $n = 3$.

A segunda parte da tese se dedica ao estudo das superfícies de curvatura média anisotrópica constante em $\mathbb{R}^3$. Obtemos um Teorema do tipo Bernstein para multigráficos com curvatura média anisotrópica constante, uma versão anisotrópica de um teorema provado por D. Hoffman, R. Osserman e R. Schoen, em 1982. Como consequência, provamos que superfícies completas com curvatura média anisotrópica constante não nula e cuja curvatura gaussiana não muda de sinal são ou a forma de Wulff ou os cilindros. Provamos estimativas uniformes de altura para gráficos verticais com curvatura média anisotrópica constante não nula e bordo plano, uma generalização do teorema provado por W. Meeks, em 1988, e obtemos estimativas uniformes de altura para superfícies compactas mergulhadas com curvatura média anisotrópica constante não nula e bordo plano, como um corolário. Também provamos, sob certas hipóteses de simetria na função de anisotropia, a não existência de superfícies propriamente mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média anisotrópica constante não nula e com apenas um fim.

Contents

Introduction	xvii
I.1 Introduction to Part I	xvii
I.2 Introduction to Part II	xxi
I.3 Introducción a la Parte I	xxvii
I.4 Introducción a la Parte II	xxxix
1 Preliminaries and basic notations	3
1.1 Basics of Submanifold Theory	3
1.2 Space forms and the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	6
1.3 Rotation hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	8
1.4 Hypersurfaces with a canonical principal direction	8
1.5 Classical operators	9
2 Pseudo-parallel immersions in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	11
2.1 Semi-parallel and pseudo-parallel submanifolds	11
2.2 Pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	15
2.3 Classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	17
2.4 Pseudo-parallel surfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	20
2.5 Characterization of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	22
2.6 Some examples	25
3 Constant anisotropic mean curvature surfaces	33
3.1 The variational problem	33
3.2 The Wulff's construction	36
3.3 The anisotropic Gauss map	39
3.4 Some examples	43
4 Main results	49
4.1 Compactness theorem	49
4.2 Second fundamental form and horizontal diameter estimates	52
4.3 Bernstein-type theorem for CAMC multigraphs	56
4.4 Height estimates for CAMC graphs	68
4.5 Properly embedded CAMC surfaces	71
Appendix A - The Maximum Principle	75
A.1 Linear second-order partial differential operators	75
A.2 Quasilinear second-order partial differential operators	82
A.3 The Tangency Principle for anisotropic mean curvatures	85
A.4 Other theorems	87

Introduction

This work is divided in two main themes. The first part concerns the study of pseudo-parallel immersions in the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. It was developed with my advisor, G.A. Lobos, with the colaboration of A.J.Y. Hancco. The second part is devoted on the study of constant anisotropic mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$. It is the result of a joint work with my other advisor, J.A. Gálvez, and P. Mira, most of the results obtained in a year of investigation in Spain, as a part of the PDSE program, by CAPES.

I.1 Introduction to Part I

Semi-symmetric manifolds are a well-known and natural generalization of locally symmetric manifolds, they were introduced by E. Cartan in [22] and classified by Z.I. Szabó (see [96] and [97]). Investigation of several properties of semi-symmetric manifolds gives rise to their next generalization: the pseudo-symmetric manifolds. For example, *every totally umbilic submanifold of a semi-symmetric manifold, with parallel mean curvature vector, is pseudo-symmetric* (see [2]). The class of pseudo-symmetric manifolds is very large, and many examples of pseudo-symmetric manifolds which are not semi-symmetric have been constructed (see e.g. [34], [37] and references therein). In the last three decades, a big amount of results both intrinsic and extrinsic involving this class of manifolds have been published by several authors. Consequently many particular results are known, see, for example, [30], [34], [35], [36], [37], [38], [39], but a full classification is not available yet.

On the other hand, in the Submanifold Theory, extrinsic conditions analogue to local symmetry, semi-symmetry and pseudo-symmetry have been introduced and studied quite intensively. The notion of locally parallel immersions was introduced by D. Ferus in [45] as an extrinsic analogous to local symmetry and the same author obtained a local classification of such immersions in the Euclidean space and in the spheres of constant sectional curvature (see [44]) while in the hyperbolic spaces two classifications were obtained independently by Backes-Reckziegel (see [11]) and Takeuchi (see [99]). Curiously, we need to mention H.B. Lawson, who classified parallel hypersurfaces in the spheres before the definition of this class of submanifolds had been introduced, as we can see in [69].

Semi-parallel immersions were defined by J. Deprez in [32] as an extrinsic analogous to semi-symmetry. Many results on semi-parallel submanifolds can be found, for example, in [8], [32], [33], [41], [42], [76] and [77], but a classification is not available yet. However, we can find a complete classification of semi-parallel hypersurfaces in [33] for the Euclidean space and in [41] for real space forms.

An extrinsic analogous to pseudo-symmetry was first introduced by A.C. Asperti, G.A. Lobos and F. Mercuri in [9] in space forms: the class of pseudo-parallel submanifolds. Namely, an isometric immersion $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ is said to be *pseudo-parallel* if its second

fundamental form α satisfies the following condition:

$$\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha = \phi(X \wedge Y) \cdot \alpha, \quad (\text{I.1.1})$$

for some smooth real-valued function ϕ on M^n , where $\tilde{R}$ is the curvature tensor corresponding to the Van der Waerden-Bortolotti connection $\tilde{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ of f and for any $X, Y \in T_x M^n$, $x \in M^n$, $X \wedge Y$ denotes the endomorphism defined by

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad Z \in T_x M^n.$$

In Equation (I.1.1) the notation means

$$\begin{aligned} [R(X, Y) \cdot \alpha](Z, W) &= R^\perp(X, Y)\alpha(Z, W) - \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W); \\ [(X \wedge Y) \cdot \alpha](Z, W) &= -\alpha((X \wedge Y)Z, W) - \alpha(Z, (X \wedge Y)W), \end{aligned}$$

for $Z, W \in T_x M^n$, where $R^\perp$ is the normal curvature tensor of f .

Some notable conclusions on the study of pseudo-parallel immersions in space forms are included in the references [10] and [72], where the authors proved that pseudo-parallel surfaces are either surfaces with flat normal bundle or isotropic surfaces in the sense of B. O'Neill [83] (i.e., surfaces whose ellipse of curvature at any point is a circle). In particular, they proved that pseudo-parallel surfaces of space forms with non-vanishing normal curvature in codimension 2 are superminimal surfaces in the sense of Bryant [14] (i.e., surfaces which are minimal and isotropic). They also obtained a classification of pseudo-parallel hypersurfaces in space forms. Essentially, such hypersurfaces are either *quasi-umbilic* hypersurfaces or *cyclids of Dupin*.

The next step is to study these kind of submanifolds in other ambient spaces. For example, in almost complex manifolds works were carried out by G. Lobos and M. Ortega in [73], where a local classification for pseudo-parallel real hypersurfaces was given. Essentially, pseudo-parallel real hypersurfaces M^{2n-1} , $n \geq 2$, of a complex space form $\tilde{M}^n(4c)$ with constant holomorphic sectional curvature $4c$ are either tubes over a totally geodesic $\mathbb{C}P^{n-1}$ or horospheres in $\mathbb{C}H^{n-1}$ or tubes over a totally geodesic $\mathbb{C}H^{n-1}$. This classification was useful later in the problem of classifying Hopf hypersurfaces with constant principal curvatures in the complex hyperbolic space $\mathbb{C}H^n$, as we can see in the eighth chapter of [24].

Other natural choices for ambient spaces are the remaining conformally flat symmetric spaces, $\mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n(c) \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^p(c) \times \mathbb{H}^{n+1-p}(-c)$ (see [90]), since they are Riemannian products of space forms and have the simplest curvature tensors apart from space forms. Here $\mathbb{S}^n(c)$ and $\mathbb{H}^n(c)$ denote the n -dimensional sphere and the n -dimensional hyperbolic space, respectively, and c denotes their sectional curvatures. Recently the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ have attracted the attention of many mathematicians. Some important studies of submanifolds in these ambient spaces include: a generalization of the Hopf's differential for surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, due to U. Abresch and H. Rosenberg in [1], permitting authors to prove that topological spheres with constant mean curvature immersed in these spaces are surfaces of revolution; a Fundamental Theorem for hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, obtained by B. Daniel in [29]; a classification of hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, given by F. Manfio and R. Tojeiro in [81], for $n \geq 3$, and by J.A. Aledo, J.M. Espinar and J.A. Gálvez in [3] and [4], for $n = 2$.

With respect to the extrinsic notions we are interested in this work, we mention G. Calvaruso, D. Kowalczyk, J. Van der Veken and L. Vrancken, who in [16] and [102] obtained a local classification of umbilical, parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and

$\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, respectively. One interesting consequence of these classifications is that umbilicity does not imply parallelism (in space forms, as a consequence of Codazzi's Equation, totally geodesic and umbilical hypersurfaces are all parallel). A complete classification of umbilical submanifolds with any codimension in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ was obtained by B. Mendonça and R. Tojeiro in [80] and the same authors gave a complete classification of parallel submanifolds in a product of two space forms in [79].

The study of pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ was started by F. Lin and B. Yang in [70] with a classification of pseudo-parallel hypersurfaces. They obtained an algebraic description of the Weingarten operator, which is presented in Lemma 3.1 of [70]. Also, they gave the geometric description of such hypersurfaces, except for a missing case, the class in which the Weingarten operator has three distinct eigenvalues. One of our objectives in this thesis is to complete this classification. A main step was to show that, even in the case in which the shape operator has three distinct eigenvalues, the tangent component T of $\frac{\partial}{\partial t}$ (the unit vector that spans the second factor of the ambient space) is in fact a principal direction. On the other hand, in [101] R. Tojeiro described explicitly this class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Putting together [10], [70] and [101], we show the following theorem:

Theorem I.1.1. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface with three distinct principal curvatures. Then, $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R}$ and there exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that either $f(x, s) = (g(x), s)$ or f is given by*

$$f(x, s) = \cos(s)g(x) + \sin(s)N(x) + a(s)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{if } \epsilon = 1; \quad (\text{I.1.2})$$

$$f(x, s) = \cosh(s)g(x) + \sinh(s)N(x) + a(s)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{if } \epsilon = -1; \quad (\text{I.1.3})$$

for a linear function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nowhere vanishing derivative. Here N denotes the unit normal vector field of g and the elements in equations (I.1.2) and (I.1.3) are seen by their canonical inclusions in $\mathbb{E}^{n+2}$.

In this way, from Theorem I.1.1 and the results obtained in [70], the classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ becomes:

Theorem I.1.2 (Classification Theorem). *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface. Then one of the following occurs:*

- (i) $n = 2$ and ϕ is the Gaussian curvature;
- (ii) f is umbilical;
- (iii) f is a rotation hypersurface;
- (iv) $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is given by $f(x, s) = (g(x), s)$, for a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$;
- (v) There exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is given by equations (I.1.2) and (I.1.3) in terms of g and a linear function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nowhere vanishing derivative.

As a consequence of Theorem I.1.2 we obtain a classification of minimal and constant mean curvature pseudo-parallel hypersurfaces.

Corollary I.1.3. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) be a pseudo-parallel hypersurface with constant mean curvature. Then f is either totally geodesic, a rotation hypersurface with constant mean curvature, or it is given as in item (iv) of Theorem I.1.2, where $g(M^{n-1})$ is an open part of $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$ (resp. $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$) if $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$), for some real numbers c_1, c_2 satisfying $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \epsilon$ and some $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

Corollary I.1.4. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) be a pseudo-parallel hypersurface. If f is minimal, then f is either a totally geodesic hypersurface, a minimal rotation hypersurface, or $\epsilon = 1$ and f is given as in item (iv) of Theorem I.1.2, where $g(M^{n-1})$ is an open part of $\mathbb{S}^k(\frac{n-1}{k}) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(\frac{n-1}{n-k-1})$ for some $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

We recall that minimal and constant mean curvature rotation hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ were classified in [40].

In this work we also started the study of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ (with $\epsilon \neq 0$). The second main result of the first part of this work is a characterization of pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature as isotropic surfaces, generalizing a similar result in space forms given by Asperti-Lobos-Mercuri in [10].

Theorem I.1.5. *Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a ϕ -pseudo-parallel surface with nowhere vanishing normal curvature. Then f is λ -isotropic and*

$$\begin{aligned} r(x)^2 &= K - \phi > 0, \\ \lambda^2 &= 4K - 3\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) > 0, \\ \|H\|^2 &= 3K - 2\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) \geq 0, \end{aligned}$$

where K is the Gaussian curvature, λ is a smooth real-valued function on M^2 , $r(x)$ is the radius of the ellipse of curvature of f at $x \in M^2$, H is the mean curvature vector field of f and T is the tangent part of $\frac{\partial}{\partial t}$, the canonical unit vector field tangent to the second factor of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Conversely, if f is λ -isotropic then f is pseudo-parallel.

As a consequence of Theorem I.1.5, we have the following corollary concerning the non-existence of pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature in co-dimension two.

Corollary I.1.6. *There is no pseudo-parallel surface $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ with nowhere vanishing normal curvature.*

We organized the first part of the thesis into two chapters. In the first chapter we introduce the notations we use along the whole work and recall some concepts of the Submanifold Theory. We also recall the space forms and the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, including for these last ones their Fundamental Equations for surfaces and hypersurfaces, essential tools that we make use in the next chapter. The next section is devoted to present rotation hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and the characterization of this class of hypersurfaces in terms of the second fundamental form. In the following section we recall the geometric description given by R. Tojeiro of hypersurfaces with T as a principal direction.

The second chapter is devoted to our study of pseudo-parallel immersions in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. We begin with precise definitions of the classes of submanifolds we are interested, recalling a characterization of semi-parallel hypersurfaces in space forms in terms of its Weingarten operator, and the classification of semi-parallel hypersurfaces in space forms and in the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. In the following section we make an improvement of Lemma 3.1, in [70], showing that the second case in item (iii) does not

occur and that T is the principal direction with related principal curvature equals to zero. After it, we present in the third section the proof of Theorem I.1.1 and the Classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ or $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, after we put our result together with the partial classification given in [70]. We also give the proofs of Corollaries I.1.3 and I.1.4. In next two sections we study the surface case, observing that any isometric immersion $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with flat normal bundle is pseudo-parallel (see Proposition 2.4.2) and proving other auxiliary propositions. Then we prove Theorem I.1.5 and Corollary I.1.6. Although there no exist pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature, as stated in Corollary I.1.6, the class of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ is not empty. In Section 2.6 we give examples of semi-parallel surfaces which are not parallel as well as examples of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ which are neither semi-parallel nor pseudo-parallel surfaces in a slice. Finally, we remark that pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with $n \geq 4$ and non-vanishing normal curvature do exist, as shown in Examples 2.6.3, 2.6.5 and 2.6.6 in the Section 2.6.

I.2 Introduction to Part II

Surfaces of constant mean curvature are one of the oldest and most interesting topics in Differential Geometry. The reason for their importance relies on the fact that they appear as local solutions for the problem of minimizing area among the surfaces that enclose a prescribed volume: the famous Isoperimetric Problem.

Along the years, surfaces of constant mean curvature (CMC surfaces, for short) attracted the attention of many mathematicians and many progress have been done. Among the most important problems on CMC surfaces are those that involve global geometric or topological conditions as completeness, compactness, embeddedness, properness and stability. Some important achievements include: the Alexandrov's Theorem (see [6]), which states that the only compact CMC surface embedded in $\mathbb{R}^3$ is the round sphere; the well known Hopf's Theorem (see [60]), which states the only topological sphere with constant mean curvature immersed in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ is the round sphere; the results found in [78], where W. Meeks proved that any properly embedded annulus with constant mean curvature is contained in a solid half-cylinder. He also concluded that there is no proper embedded CMC surface Σ with just one end and if Σ has only two ends, then it is contained in a solid cylinder.

However surfaces of constant mean curvature are also objects of interest for physicists. For example, when two non mixing materials come into contact, the interface between them may often be represented as a surface. According to the law of least action, the equilibrium surface will form in such a way that it attempts to minimize its surface energy subject to constraints and additional forces imposed by the environment. For homogeneous materials, like soapy water, the surface energy (surface tension) is isotropic and proportional to the area of the surface interface. In this case, the process of minimization leads to the formation of minimal surfaces (when no volume constraints are imposed) and constant mean curvature surfaces (when a volume constraint is imposed), the mathematical models for soap films and soap bubbles, respectively. For other types of materials, like some fluids or cooling liquid crystals, a process of crystallization can eventually occur. In this case, their atomic or molecular structures assume a regular repeating pattern, and to model the shape of the interface of the fluid with its environment, we need to take the internal structure of the material into account: the usual isotropic surface energy must be replaced by an anisotropic one, that is, an energy that depends on the direction of the surface at each point.

Anisotropic surface energies were typically given by the functional

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Sigma} F(N(x)) d\Sigma, \quad (\text{I.2.1})$$

where $F : \Omega \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function over an open subset Ω of $\mathbb{S}^2$ and $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ is an immersion with unit normal field N . In particular, if $F \equiv 1$, then $\mathcal{F}$ becomes the well known area functional.

In this thesis we discuss surfaces that are equilibrium points of the functional $\mathcal{F}$, imposing or not volume constraints into the problem. The Euler–Lagrange equation for these problems characterize the equilibrium surfaces in terms of a certain quantity assigned on each of its points, that we call the anisotropic mean curvature. Namely, if Σ is any surface and $N : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ is a unit normal vector field of Σ defined in an open subset U , the anisotropic mean curvature Λ of Σ with respect to N is given by the relation:

$$\Lambda(x) := -\operatorname{div}_{\Sigma}((\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{N(x)}) + 2F(N(x))H(x), \quad (\text{I.2.2})$$

where $H(x)$ denotes the mean curvature of Σ at x with respect to N and $(\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{N(x)}$ is seen as a vector of $T_x\Sigma$, after we identify it with $T_{N(x)}\mathbb{S}^2$.

For each choice of a function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, there is a notable surface that we need to bear in mind: the Wulff shape of F (or the crystal of F). It was discovered by a russian chrystallographer called George Wulff, in the beginning of the twentieth century. Later, with the machinery of the Geometric Measure Theory, it was proven by J. Taylor in [100] that the Wulff shape is in fact the absolute minimizer of the functional $\mathcal{F}$ among all closed surfaces prescribing the same volume, a result known as the Wulff’s Theorem.

Although the Wulff shape is well defined even when F is defined only in an open subset of $\mathbb{S}^2$, in this work we will consider only the case where F is a smooth function defined over the whole sphere $\mathbb{S}^2$. We also impose the “convexity condition”: $(\operatorname{Hess}_{\mathbb{S}^2} F)_y + F(y)\langle, \rangle : T_y\mathbb{S}^2 \times T_y\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a positive-definite bilinear form, for any point $y \in \mathbb{S}^2$. The reason for these conditions is purely technical. They imply that the Wulff shape is a strictly convex, compact smooth surface, and from Wulff’s Theorem we may infer that the Wulff shape has constant anisotropic mean curvature. From its minimizing and compactness properties, the Wulff shape will play in the theory of CAMC surfaces a similar role as the round sphere does in the theory of CMC surfaces.

Another reason to impose the convexity condition relies on the fact that it is possible to show that the equation for constant anisotropic mean curvature surfaces is absolut elliptic. This means that CAMC surfaces satisfy a Maximum Principle, in the sense of E. Hopf. In other words, if two surfaces have the same constant anisotropic mean curvature, and if the unit normal vectors (corresponding to the anisotropic mean curvature) of both surfaces coincide at a contact point in such a way that one surface lies on one side of the other in a neighborhood of such contact point, then the two surfaces agree in this neighborhood. Since this principle is one of the most important tools used in the study of CMC surfaces and it is also valid for CAMC surfaces, we expect that most of the results on CMC surfaces has extensions to CAMC surfaces.

Many studies on CAMC surfaces were carried up to this date, specially in the last two decades, when many advances were achieved. For example, B. Palmer proved in [84] that up to homotheties, the Wulff shape is the only closed, oriented, stable CAMC surface, an anisotropic extension of the famous theorem of J.L. Barbosa and M.P. do Carmo, in [12]. From the partnership of B. Palmer with M. Koiso arose many other important results. Some of them include: the study of cappillary surfaces; the description of the so called anisotropic Delaunay surfaces (i.e., rotation CAMC surfaces) as well

the rolling construction to obtain their profile curves, obtained in [64] and [66], and generalizing the construction of Delaunay in [31]; they also proved an anisotropic version of the Hopf's Theorem in [65]. We also mention the works of H. Li and his collaborators. Among their results we cite an anisotropic version of the Alexandrov Theorem, obtained in [56] and the characterization of the Wulff shape in terms of higher order anisotropic mean curvatures, in [52]. Other interesting results we may cite are the classification of anisotropic isoparametric hypersurfaces due to Ge, in [46], and the study of CAMC helicoids by Kuhns, in [68]. We finally mention [71], where J.H.S. de Lira and M. Melo extend the notion of anisotropic mean curvature for immersed hypersurfaces of arbitrary Riemannian manifolds.

Motivated by the similarities between the theory of CMC and CAMC surfaces, our objective in this thesis will be present the anisotropic version of three important theorems. The first main result is a Bernstein-type Theorem for complete CAMC multigraphs, an anisotropic version of the theorem proved by D. Hoffman, R. Osserman and R. Schoen in [58].

Theorem I.2.1. Let Σ be a vertical multi-graph in $\mathbb{R}^3$, that is, for any $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ is not a vertical plane. Suppose that Σ is complete and has constant anisotropic mean curvature. Then Σ is a plane.

An immediate consequence of Theorem I.2.1 is the following corollary.

Corollary I.2.2. Let Σ be a complete CAMC surface whose Gauss map image is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^2$. Then Σ is either a plane or a CAMC cylinder.

The second main result we obtained in the second part the thesis is also a consequence of Theorem I.2.1, where we generalize a theorem about CMC surfaces whose Gauss curvature does not change sign, a result found in [63], due to T. Klotz and R. Osserman.

Theorem I.2.3. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete immersed surface of constant anisotropic mean curvature $\Lambda \neq 0$. If the Gaussian curvature of Σ does not change sign then Σ is one of the following surfaces:

- (i) a CAMC cylinder;
- (ii) the Wulff shape (up to a homothety).

In the third main theorem of the second part of this thesis we develop an uniform upper bound for the maximum height of CAMC graphs with planar boundary, depending only on the anisotropic mean curvature. More presicely, we have

Theorem I.2.4. Let $\Lambda \neq 0$ be a real number and let $v \in \mathbb{S}^2$ be any unit vector. Then there is a constant $C = C(\Lambda)$ such that for any closed (not necessary bounded) domain Ω of the plane $\Pi = \{v\}^\perp$ and smooth function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ that vanishes on $\partial\Omega$ and whose graph Σ over Π is a Λ -CAMC surface, the height of any point $p \in \Sigma$ relative to Π is at most C .

The isotropic version of Theorem I.2.4 was first obtained by W. Meeks in [78], and lately generalized by J.A. Aledo, J.M. Espinar and J.A. Gálvez in [5], for more general classes of surfaces that satisfy the Maximum Principle, such as special Weingarten surfaces, i.e., surfaces that satisfies a relation $H = f(H^2 - K)$, for a certain function f , where H and K denotes the constant mean curvature and the Gaussian curvature of the surfaces, respectively. Although Theorem I.2.4 does not provide optimum estimates, we

recall that its isotropic version was proved to be a fundamental tool for the study of properly embedded CMC surfaces in $\mathbb{R}^3$. Among the consequences of these height estimates for graphs are the non-existence of properly embedded CMC surfaces with only one end, as we mentioned previously in the second paragraph, and that any two-ended properly embedded CMC surfaces are revolution surfaces.

Our main difficulty in the proof of Theorem I.2.4 relies on the fact that the functional $\mathcal{F}$ is not necessarily invariant under reflections. In other words, if Π is a plane and Σ is a CAMC surface, then the image of Σ under the reflection over Π is not necessarily a CAMC surface, since the values of F in a point and its reflected image could be distinct. This fact prohibits the use of the Alexandrov's Method of Moving Planes, that was used in the proof of the isotropic version of Theorem I.2.4.

As a corollary of Theorem I.2.4 we prove uniform estimates for compact surfaces with non-zero constant anisotropic mean curvature and planar boundary.

Corollary I.2.5. Suppose that the anisotropy function F is invariant under the reflection in $\mathbb{S}^2$ that fixes the geodesic $\mathbb{S}^2 \cap \{v\}^\perp$, for some $v \in \mathbb{S}^2$. Let Σ be any compact Λ -CAMC surface ($\Lambda \neq 0$), that is embedded in $\mathbb{R}^3$ and whose boundary is contained in the plane $\{v\}^\perp$. There exists a positive constant C depending only on Λ such that the height of any point $p \in \Sigma$ relative to $\{v\}^\perp$ is at most C .

Under certain symmetry hypothesis on the anisotropy function and proving an anisotropic version of the famous Meeks' Separation Lemma (see [78] and [67]), we are able to prove the non-existence of properly embedded surfaces in $\mathbb{R}^3$ with non-zero constant anisotropic mean curvature and with just one end.

Theorem I.2.6. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a properly embedded Λ -CAMC ($\Lambda \neq 0$) surface with finite topology and at most one end. Consider three linearly independent vectors $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ and suppose in addition that the anisotropy function F is invariant under the reflections in $\mathbb{S}^2$ which fix the geodesics $\mathbb{S}^2 \cap \{v_i\}^\perp$, for $i \in \{1, 2, 3\}$. Then, up to a homothety, Σ is the Wulff shape.

We also organize the second part of this thesis into two chapters. In chapter three we devote attention on the introduction of the basic concepts on the theory of constant anisotropic mean curvature surfaces. In the first section we present the variational problem, whose critical points are our object of interest. To characterize such critical points in terms of the anisotropy function and the mean curvature, we recall the first variation formula, which leads us to the definition of the anisotropic mean curvature of a surface. Next, we present the Wulff shape, relating its geometric construction with its analytic description. This allow us, in the following section, to define the anisotropic analogous of the normal Gauss map and the second fundamental form. In particular, the anisotropic mean curvature of a surface will be given by the trace of the anisotropic second fundamental form. A brief section with examples of CAMC surfaces was included, where a comparison between the isotropic and anisotropic cases can be made by the reader. Namely, we recall the construction of rotation CAMC surfaces, CAMC helicoids and CAMC cylinders. This last one, in special, will play a crucial role in the results obtained in the next chapter.

The proofs of the main results of this thesis, namely, Theorems I.2.1, I.2.3 and I.2.4, are the contents of Chapter four. To overcome the difficulties related to the Method of Moving Planes, we follow the ideas found in [15]. First, we adapt a Compactness Theorem for CAMC surfaces with bounded second fundamental form and whose anisotropic mean curvatures converge to a pre-fixed real number. This result allows us to obtain complete CAMC surfaces as limits of sequences of CAMC surfaces over compact sets, and it will

be applied along the whole chapter. Another useful result we adapt from [15] was a priori second fundamental form estimates for CAMC surfaces whose anisotropic mean curvature is bounded by a prefixed positive number and whose Gauss map omits a disk of prefixed area. A key step for its proof was the use of a Bernstein-type Theorem for anisotropic minimal surfaces, due to H.B. Jenkins (see [62]), that we also recall in the text. We also prove horizontal diameter estimates in the sense of [78], i.e., diameter estimates for the connected components of horizontal slices of CAMC graphs defined on closed domains with zero boundary values. These estimates depend only on the anisotropic mean curvature. Its proof is based on the ideas of [5]. Following these auxiliary results, we give a proof of Theorem I.2.1. Although the isotropic version of Theorem I.2.1 is proven using arguments on the harmonicity of the Gauss map N of the surface and properties of the equation $\Delta N + \|dN\|^2 N = 0$ (where Δ denotes the Laplacian operator of the surface), our proof is geometric and part of it is based on the ideas found in [51]. Putting together Theorem I.2.1 and the auxiliary results, we are able to prove Theorem I.2.4 and its consequences, including the study of properly embedded CAMC surfaces in $\mathbb{R}^3$ with finite topology, where we conclude with the proof of Theorem I.2.6.

Finally, for the reader convenience, we add an detailed appendix about the Maximum Principle. We recall the Maximum Principle for linear and quasi-linear second-order elliptic differential operators and we establish a geometric version of the Maximum Principle, known as the Tangency Principle, for the anisotropic mean curvature operator.

Introducción

Este trabajo está dividido en dos temas principales. La primera parte se refiere al estudio de las inmersiones pseudo-paralelas en los espacios producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Esa parte fue desarrollada con mi director de tesis, G.A. Lobos, y con la colaboración de A.J.Y. Hancoco. La segunda parte se dedica al estudio de las superficies de curvatura media anisotrópica constante en $\mathbb{R}^3$. Ese estudio es el resultado de un trabajo conjunto con mi otro director, J.A. Gálvez, y P. Mira, la mayoría de los resultados obtenidos durante un año de investigación en España, como parte del programa PDSE, por CAPES.

I.3 Introducción a la Parte I

Las variedades semi-simétricas son una generalización natural y bien conocida de las variedades localmente simétricas, fueron introducidas por E. Cartan en [22] y clasificadas por Z.I. Szabó (ver [96] y [97]). La investigación de varias propiedades de las variedades semi-simétricas da lugar a su próxima generalización: las variedades pseudo-simétricas. Por ejemplo, *cualquier subvariedad totalmente umbilical de una variedad semi-simétrica, con vector de curvatura media paralelo, es pseudo-simétrica* (ver [2]). La clase de variedades pseudo-simétricas es muy grande, y se han construido muchos ejemplos de variedades pseudo-simétricas que no son semi-simétricas (véanse, por ejemplo, [34], [37] y sus referencias). En las últimas tres décadas, varios autores han publicado una gran cantidad de resultados tanto intrínsecos como extrínsecos acerca de esta clase de variedades. Como consecuencia, se conocen muchos resultados particulares, véase, por ejemplo, [30], [34], [35], [36], [37], [38], [39], pero una clasificación completa aún no existe.

Por otro lado, en la Teoría de Subvariedades, condiciones extrínsecas análogas a las de simetría-local, de semi-simetría y de pseudo-simetría han sido introducidas y estudiadas con bastante intensidad. Ferus introdujo la noción de inmersiones localmente paralelas en [45] como un análogo extrínseco a la simetría-local y el mismo autor obtuvo una clasificación local de tales inmersiones en el espacio euclídeo y en las esferas (ver [44]) mientras que en los espacios hiperbólicos se obtuvieron dos clasificaciones independientemente por Backes-Reckziegel (ver [11]) y Takeuchi (ver [99]). Curiosamente, debemos mencionar a H.B. Lawson, que clasificó las hipersuperficies paralelas en las esferas antes de que se introdujera la definición de esta clase de subvariedades, como podemos ver en [69].

Las inmersiones semi-paralelas fueron definidas por J. Deprez en [32] como un análogo extrínseco a la semi-simetría. Se pueden encontrar muchos resultados acerca de subvariedades semi-paralelas, por ejemplo, en [8], [32], [33], [41], [42], [76] y [77], pero una clasificación aún no está disponible. Sin embargo, podemos encontrar una clasificación completa de las hipersuperficies semi-paralelas en [33] para el espacio euclídeo y en [41] para formas espaciales.

Un análogo extrínseco a la pseudo-simetría fue introducido por primera vez por A.C. Asperti, G.A. Lobos y F. Mercuri en [9] en formas espaciales: la clase de subvariedades

pseudo-paralelas. A saber, una inmersión isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ se dice que es *pseudo-paralela* si su segunda forma fundamental α satisface la siguiente condición:

$$\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha = \phi(X \wedge Y) \cdot \alpha, \quad (\text{I.3.1})$$

para alguna función a valores reales ϕ definida en M^n , donde $\tilde{R}$ es el tensor de curvatura correspondiente a la conexión de Van der Waerden-Bortolotti $\tilde{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ de f y para cualquier $X, Y \in T_x M^n$, $x \in M^n$, $X \wedge Y$ denota el endomorfismo definido por

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad Z \in T_x M^n.$$

En la ecuación (I.3.1) la notación significa

$$\begin{aligned} [R(X, Y) \cdot \alpha](Z, W) &= R^\perp(X, Y)\alpha(Z, W) - \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W); \\ [(X \wedge Y) \cdot \alpha](Z, W) &= -\alpha((X \wedge Y)Z, W) - \alpha(Z, (X \wedge Y)W), \end{aligned}$$

para $Z, W \in T_x M^n$, donde $R^\perp$ es el tensor de curvatura normal de f .

Algunas conclusiones notables sobre el estudio de las inmersiones pseudo-paralelas en formas espaciales se incluyen en las referencias [10] y [72], donde los autores probaron que las superficies pseudo-paralelas son superficies con fibrado normal plano o superficies isotrópicas en el sentido de B. O'Neill [83] (es decir, superficies cuya elipse de curvatura en cualquier punto es un círculo). En particular, demostraron que las superficies pseudo-paralelas en formas espaciales con curvatura normal que no se anula y codimensión 2 son superficies superminimales en el sentido de Bryant [14] (es decir, superficies que son minimales y isotrópicas). También obtuvieron una clasificación de las hipersuperficies pseudo-paralelas en formas espaciales. Esencialmente, tales hipersuperficies son o bien hipersuperficies *cuasi-umbilicales* o bien *cíclides de Dupin*.

El siguiente paso es estudiar este tipo de subvariedades en otros espacios ambientes. Por ejemplo, en variedades cuasi-complejas trabajos fueron realizados por G. Lobos y M. Ortega en [73], donde una clasificación local para las hipersuperficies pseudo-paralelas reales fue dada. Esencialmente, las hipersuperficies pseudo-paralelas reales M^{2n-1} , $n \geq 2$, de una forma espacial compleja $\tilde{M}^n(4c)$ con curvatura seccional holomorfa constante $4c$ o son tubos sobre un $\mathbb{C}P^{n-1}$ totalmente geodésico o bien horosferas en $\mathbb{C}H^{n-1}$ o tubos sobre un $\mathbb{C}H^{n-1}$ totalmente geodésico. Esta clasificación fue útil más tarde en el problema de clasificar las hipersuperficies de Hopf con curvaturas principales constantes en el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n$, como podemos ver en el octavo capítulo de [24].

Otras opciones naturales para espacios ambientes son los espacios simétricos conformemente planos restantes, $\mathbb{S}^n(c) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n(c) \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^p(c) \times \mathbb{H}^{n+1-p}(-c)$ (ver [90]), ya que son productos riemannianos de formas espaciales y tienen los tensores de curvatura más sencillos, después de las formas espaciales. Aquí $\mathbb{S}^n(c)$ y $\mathbb{H}^n(c)$ denotan la esfera n -dimensional y el espacio hiperbólico n -dimensional, respectivamente, y c denota sus curvaturas seccionales. Recientemente, los espacios producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ han atraído la atención de muchos matemáticos. Algunos estudios importantes de subvariedades en estos espacios ambientes incluyen: una generalización de la diferencial de Hopf para superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, debido a U. Abresch y H. Rosenberg in [1], lo que permite a los autores demostrar que las esferas topológicas con curvatura media constante inmersas en estos espacios son superficies de revolución; un Teorema Fundamental para hipersuperficies en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, obtenido por B. Daniel en [29]; una clasificación de hipersuperficies con curvatura seccional constante de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, dada por F. Manfio y R. Tojeiro en [81], para $n \geq 3$, y por J.A. Aledo, J.M. Espinar y J.A. Gálvez en [3] y [4], para $n = 2$.

Con respecto a las nociones extrínsecas que estamos interesados en ese trabajo, mencionamos a G. Calvaruso, D. Kowalczyk, J. Van der Veken y L. Vrancken, quienes en [16] y [102] obtuvieron una clasificación local de las superficies umbilicales, paralelas y semi-paralelas de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, respectivamente. Una consecuencia interesante de estas clasificaciones es que la umbilicidad no implica paralelismo (en formas espaciales, como consecuencia de la ecuación de Codazzi, las hipersuperficies totalmente geodésicas y umbilicales son todas paralelas). Posteriormente, B. Mendonça y R. Tojeiro obtuvieron en [80] una clasificación completa de las subvariedades umbilicales con cualquier codimensión en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y los mismos autores dieron una clasificación completa de subvariedades paralelas en un producto de dos formas espaciales en [79].

El estudio de hipersuperficies pseudo-paralelas en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ fue iniciado por F. Lin y B. Yang, en [70], con una clasificación de hipersuperficies pseudo-paralelas. Obtuvieron una descripción algebraica del operador de Weingarten, que es presentado en el Lema 3.1 de [70]. Además, dieron la descripción geométrica de tales hipersuperficies, a excepción de un caso que falta: la clase en la que el operador de Weingarten tiene tres valores propios distintos. Uno de nuestros objetivos en esta tesis es completar esta clasificación. Un paso clave fue mostrar que, incluso en el caso en que el operador forma tiene tres valores propios distintos, la componente tangente T de $\frac{\partial}{\partial t}$ (el vector unitario tangente al segundo factor del espacio ambiente) es, de hecho, una dirección principal. Por otro lado, en [101] R. Tojeiro describió explícitamente esta clase de hipersuperficies en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Al juntar los resultados de [10], [70] y [101], mostramos el siguiente teorema:

Teorema I.3.1. *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ una hipersuperficie pseudo-paralela con tres curvaturas principales distintas. Entonces, $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R}$ y existe una hipersuperficie semi-paralela $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ tal que $f(x, s) = (g(x), s)$ o f viene dada por*

$$f(x, s) = \cos(s)g(x) + \sin(s)N(x) + a(s)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{si } \epsilon = 1; \quad (\text{I.3.2})$$

$$f(x, s) = \cosh(s)g(x) + \sinh(s)N(x) + a(s)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{si } \epsilon = -1; \quad (\text{I.3.3})$$

en términos de g y una función lineal $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada que nunca se anula. Aquí N denota el campo normal unitario de g y los elementos de las ecuaciones (I.3.2) y (I.3.3) son vistos como sus inclusiones canónicas en $\mathbb{E}^{n+2}$

En ese sentido, del Teorema I.3.1 y los resultados obtenidos en [70], la clasificación de las hipersuperficies pseudo-paralelas de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ se torna:

Teorema I.3.2 (Teorema de Clasificación). *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ una hipersuperficie pseudo-paralela. Entonces ocurre una de las siguientes:*

- (i) $n = 2$ y ϕ es la curvatura gaussiana;
- (ii) f es umbilical;
- (iii) f es una hipersuperficie de rotación;
- (iv) $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ es dada por $f(x, s) = (g(x), s)$, para una hipersuperficie semi-paralela $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$;
- (v) Existe una hipersuperficie semi-paralela $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ tal que $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ es dada por las ecuaciones (I.3.2) y (I.3.3) en términos de g y de una función lineal $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada que nunca se anula.

Como consecuencia del Teorema I.3.2 obtenemos una clasificación de hipersuperficies pseudo-paralelas minimales y de curvatura media constante.

Corolario I.3.3. *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) una hipersuperficie pseudo-paralela con curvatura media constante. Entonces f es o totalmente geodésica, o una hipersuperficie de rotación con curvatura media constante, o es dada como en el ítem (iv) del Teorema I.3.2, donde $g(M^{n-1})$ es un abierto de $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$ (resp. $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$) si $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$), para algunos números reales c_1, c_2 satisfaciendo $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \epsilon$ y algún $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

Corolario I.3.4. *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) una hipersuperficie pseudo-paralela. Si f es minimal, entonces f es una hipersuperficie totalmente geodésica, o una hipersuperficie de revolución minimal, o $\epsilon = 1$ y f es dada como en el ítem (iv) del Teorema I.3.2, donde $g(M^{n-1})$ es un abierto de $\mathbb{S}^k(\frac{n-1}{k}) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(\frac{n-1}{n-k-1})$ para algún $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

Recordamos que las hipersuperficies de rotación minimales y con curvatura media constante en $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ fueron clasificadas en [40].

En este trabajo también comenzamos el estudio de superficies pseudo-paralelas en $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ (con $\epsilon \neq 0$). El segundo resultado principal de la primera parte de este trabajo es una caracterización de superficies pseudo-paralelas con curvatura normal que no se anula como superficies isotrópicas, generalizando un resultado similar en formas espaciales dadas por Asperti-Lobos-Mercuri en [10].

Teorema I.3.5. *Sea $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ una superficie ϕ -pseudo-paralela cuya curvatura normal no es idénticamente nula en M^2 . Entonces f es λ -isotrópica y*

$$\begin{aligned} r(x)^2 &= K - \phi > 0, \\ \lambda^2 &= 4K - 3\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) > 0, \\ \|H\|^2 &= 3K - 2\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) \geq 0, \end{aligned}$$

donde K es la curvatura gaussiana, λ es una función suave definida en M^2 , $r(x)$ es el radio de la elipse de curvatura de f en $x \in M^2$, H es el vector curvatura media de f y T es la parte tangente de $\frac{\partial}{\partial t}$, el campo vectorial unitario tangente al segundo factor de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Recíprocamente, si f es λ -isotrópica, entonces f es pseudo-paralela.

Como una consecuencia del Teorema I.3.5, tenemos el siguiente corolario que establece la inexistencia de superficies pseudo-paralelas con curvatura normal que no se anula, en codimensión 2.

Corolario I.3.6. No existe superficie pseudo-paralela $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ con curvatura normal que no se anula.

Organizamos la primera parte de la tesis en dos capítulos. En el primer capítulo presentamos las notaciones que usamos a lo largo de todo el trabajo y recordamos algunos conceptos de la Teoría de Subvariedades. También recordamos las formas espaciales y los espacios producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, incluyendo para estos últimos sus Ecuaciones Fundamentales para superficies e hipersuperficies, herramientas esenciales que usaremos en el próximo capítulo. La siguiente sección está dedicada a presentar las hipersuperficies de rotación de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ y la caracterización de esa clase de hipersuperficies en términos de la segunda forma fundamental. En la siguiente sección recordamos la descripción geométrica dada por R. Tojeiro de las hipersuperficies que tienen a T como una dirección principal.

El segundo capítulo está dedicado a nuestro estudio de inmersiones pseudo-paralelas en $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Comenzamos con definiciones precisas de las clases de subvariedades que nos interesan, recordando una caracterización de las hipersuperficies semi-paralelas en formas espaciales en términos del operador de Weingarten, y la clasificación de las hipersuperficies semi-paralelas en formas espaciales y en los espacios producto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. En la siguiente sección realizamos una mejora del Lemma 3.1, en [70], donde probamos que el segundo caso en el ítem (iii) no ocurre y que T es la dirección principal con curvatura principal relacionada igual a cero. A continuación, presentamos en la tercera sección la prueba del Teorema I.3.1 y la Clasificación de las hipersuperficies pseudo-paralelas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, después de poner nuestro resultado junto con la clasificación parcial dada en [70]. También proporcionamos las pruebas de los Corolarios I.3.3 y I.3.4. En las siguientes dos secciones estudiamos el caso de superficies, observando que cualquier inmersión isométrica $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ con fibrado normal plano es pseudo-paralela (ver Proposición 2.4.2) y probamos otras proposiciones auxiliares. Luego demostramos el Teorema I.3.5 y el Corolario I.3.6. Aunque no existen superficies pseudo-paralelas con curvatura normal no idénticamente nula, como se indica en el Corolario I.3.6, la clase de superficies pseudo-paralelas en $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ es no vacía. En la Sección 2.6 damos ejemplos de superficies semi-paralelas que no son paralelas, así como ejemplos de superficies pseudo-paralelas en $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ que no son superficies semi-paralelas ni pseudo-paralelas en un corte $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \{t\}$. Finalmente, observamos que existen superficies pseudo-paralelas en $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ con $n \geq 4$ y curvatura normal no idénticamente nula, como se muestra en los Ejemplos 2.6.3, 2.6.5 y 2.6.6 en la Sección 2.6.

I.4 Introducción a la Parte II

Las superficies de curvatura media constante son uno de los temas más antiguos e interesantes en Geometría Diferencial. La razón de su importancia reside en el hecho de que surgen como soluciones locales para el problema de minimizar el área entre las superficies que encierran un volumen prescrito: el famoso Problema Isoperimétrico.

A lo largo de los años, las superficies de curvatura media constante (superficies CMC, para abreviar) atrajeron la atención de muchos matemáticos y se han hecho muchos progresos desde entonces. Entre los problemas más importantes en las superficies de CMC están aquellos que envuelven condiciones geométricas o topológicas globales como completitud, compacidad, embebimiento, ser propiamente inmersa y estabilidad. Algunos logros importantes incluyen: el Teorema de Alexandrov (ver [6]), que establece que la única superficie CMC compacta y embebida en $\mathbb{R}^3$ es la esfera redonda; el conocido Teorema de Hopf (ver [60]), que establece que la única esfera topológica con curvatura media constante inmersa en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ es la esfera redonda; los resultados que se encuentran en [78], donde W. Meeks demostró que cualquier anillo propiamente embebido con curvatura media constante está contenido en un semi-cilindro sólido. También concluyó que no hay una superficie CMC Σ propiamente embebida con solo un final y si Σ tiene solo dos finales, entonces está contenida en un cilindro sólido.

Sin embargo, las superficies de curvatura media constante también son objetos de interés para los físicos. Por ejemplo, cuando dos materiales que no se mezclan entran en contacto, la interfaz entre ellos a menudo se puede representar como una superficie. De acuerdo con la ley de mínima acción, la superficie de equilibrio se formará de tal manera que intente minimizar su energía superficial sujeta a restricciones y fuerzas adicionales impuestas por el medio ambiente. Para materiales homogéneos, como el agua con jabón, la energía superficial (tensión superficial) es isotrópica y proporcional al área

de la interfaz de la superficie. En este caso, el proceso de minimización conduce a la formación de superficies minimales (cuando no se imponen restricciones de volumen) y superficies de curvatura media constante (cuando se impone restricción al volumen), los modelos matemáticos para películas de jabón y pompas de jabón, respectivamente. Para otros tipos de materiales, como algunos fluidos o cristales líquidos en enfriamiento, puede ocurrir un proceso de cristalización. En este caso, sus estructuras atómicas o moleculares asumen un patrón regular repetitivo, y para modelar la forma de la interfaz del fluido con su entorno, debemos tener en cuenta la estructura interna del material: la energía superficial isotrópica habitual debe ser reemplazada por una anisotrópica, es decir, una energía que depende de la dirección de la superficie en cada punto.

Las energías superficiales anisotrópicas són típicamente dadas por el funcional

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Sigma} F(N(x)) d\Sigma, \quad (\text{I.4.1})$$

donde $F : \Omega \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave sobre un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{S}^2$ y $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión con campo normal unitario N . En particular, si $F \equiv 1$, entonces $\mathcal{F}$ se convierte en el bien conocido funcional área.

En esta tesis discutimos las superficies que son puntos de equilibrio del funcional $\mathcal{F}$, imponiendo o no restricciones de volumen en el problema. La ecuación de Euler-Lagrange para estos problemas caracteriza las superficies de equilibrio en términos de una cierta cantidad asignada en cada uno de sus puntos, que llamamos curvatura media anisotrópica. Es decir, si Σ es cualquier superficie y $N : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un campo vectorial normal unitario de Σ definido en un subconjunto abierto U , la curvatura media anisotrópica Λ de Σ con respecto a N viene dada por la relación:

$$\Lambda(x) := -\operatorname{div}_{\Sigma}((\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{N(x)}) + 2F(N(x))H(x), \quad (\text{I.4.2})$$

donde $H(x)$ denota la curvatura media de Σ en x con respecto a N y $(\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{N(x)}$ se ve como un vector de $T_x \Sigma$, después de identificarlo con $T_{N(x)} \mathbb{S}^2$.

Para cada elección de una función $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, hay una superficie notable que debemos tener en cuenta: la forma Wulff de F (o el cristal de F). Fue descubierto por un cristalógrafo ruso llamado George Wulff, a principios del siglo XX. Más tarde, con la maquinaria de la Teoría Geométrica de la Medida, J. Taylor demostró en [100] que la forma de Wulff es, de hecho, el minimizante absoluto del funcional $\mathcal{F}$ entre todas las superficies cerradas prescribiendo el mismo volumen, un resultado conocido como el Teorema de Wulff.

Aunque la forma de Wulff esté bien definida mismo cuando F está definida solamente en un subconjunto abierto de $\mathbb{S}^2$, en este trabajo consideraremos solo el caso donde F es una función suave definida sobre toda la esfera $\mathbb{S}^2$. También imponemos la “condición de convexidad”: $(\operatorname{Hess}_{\mathbb{S}^2} F)_y + F(y)\langle \cdot, \cdot \rangle : T_y \mathbb{S}^2 \times T_y \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal definida positiva, para cualquier punto $y \in \mathbb{S}^2$. La razón de estas condiciones es puramente técnica. Implican que la forma de Wulff es una superficie suave estrictamente convexa y compacta, y del Teorema de Wulff podemos inferir que la forma de Wulff tiene una curvatura media anisotrópica constante. Desde sus propiedades de minimización y compacidad, la forma de Wulff jugará en la teoría de superficies CMAC un papel similar al de la esfera redonda en la teoría de superficies CMC.

Otra razón para imponer la condición de convexidad reside en el hecho de que es posible demostrar que la ecuación para superficies de curvatura media anisotrópica constante es absolutamente elíptica. Esto significa que las superficies CMAC satisfacen un Principio del Máximo, en el sentido de E. Hopf. En otras palabras, si dos superficies tienen la

misma curvatura media anisotrópica constante, y si los vectores unitarios normales (correspondientes a la curvatura media anisotrópica) de ambas superficies coinciden en un punto de contacto de tal manera que una superficie se encuentra en un lado de la otra en un entorno del punto de contacto, entonces las dos superficies coinciden en ese entorno. Dado que este principio es una de las herramientas más importantes utilizadas en el estudio de las superficies CMC y también es válido para las superficies CMAC, esperamos que la mayoría de los resultados en las superficies CMC tengan extensiones a las superficies CMAC.

Muchos estudios sobre superficies CMAC se llevaron a cabo hasta esta fecha, especialmente en las últimas dos décadas, cuando se lograron muchos avances. Por ejemplo, B. Palmer demostró en [84] que salvo homotecias, la forma de Wulff es la única superficie CMAC cerrada, orientada y estable, una extensión anisotrópica del famoso teorema de J.L. Barbosa y M.P. do Carmo, en [12]. De la asociación de B. Palmer con M. Koiso surgieron muchos otros resultados importantes. Algunos de ellos incluyen: el estudio de las superficies capilares; la descripción de las llamadas superficies anisotrópicas de Delaunay (es decir, superficies CMAC de revolución), así como la construcción rodante para obtener sus curvas perfiles, obtenida en [64] y [66], y generalizando la construcción de Delaunay en [31]; también probaron una versión anisotrópica del Teorema de Hopf en [65]. También mencionamos los trabajos de H. Li y sus colaboradores. Entre sus resultados, citamos una versión anisotrópica del Teorema de Alexandrov, obtenida en [56] y la caracterización de la forma de Wulff en términos de curvaturas medias anisotrópicas de alto orden, en [52]. Otros resultados interesantes que podemos citar son la clasificación de las hipersuperficies isoparamétricas anisotrópicas debido a Ge, en [46], y el estudio de los helicoides CMAC por Kuhns, en [68]. Finalmente mencionamos [71], donde J.H.S. de Lira y M. Melo extienden la noción de curvatura media anisotrópica para hipersuperficies inmersas en variedades riemannianas arbitrarias.

Motivado por las similitudes entre la teoría de las superficies CMC y CMAC, nuestro objetivo en esta tesis será presentar la versión anisotrópica de tres teoremas importantes. El primer resultado principal es un Teorema tipo-Bernstein para multigrafos completos de CMAC, una versión anisotrópica del teorema probado por D. Hoffman, R. Osserman y R. Schoen en [58].

Teorema I.4.1. Sea Σ un multigrafo vertical en $\mathbb{R}^3$, es decir, para cualquier $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ no es un plano vertical. Suponga que Σ es completa y tiene curvatura media anisotrópica constante. Entonces Σ es un plano.

Una consecuencia inmediata del Teorema I.4.1 es el siguiente corolario.

Corolario I.4.2. Sea Σ una superficie CMAC completa cuya imagen por su aplicación de Gauss esté contenida en un hemisferio cerrado de $\mathbb{S}^2$. Entonces Σ es o bien un plano o bien un cilindro CMAC.

El segundo resultado principal de la segunda parte de la tesis es también una consecuencia del Teorema I.4.1, donde generalizamos un teorema sobre superficies CMC cuya curvatura de Gauss no cambia de signo, un resultado encontrado en [63], debido a T. Klotz y R. Osserman.

Teorema I.4.3. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie inmersa completa de curvatura media anisotrópica constante $\Lambda \neq 0$. Si la curvatura gaussiana de Σ no cambia de signo, entonces Σ es una de las siguientes superficies:

- (i) un cilindro CMAC;

(ii) la forma de Wulff (salvo homotecias).

En el tercer teorema principal de la segunda parte de esta tesis, obtenemos una acotación uniforme para la altura máxima de los gráficos CMAC con borde plano, que depende solo de la curvatura media anisotrópica. Más precisamente, tenemos

Teorema I.4.4. Sea $\Lambda \neq 0$ una constante real y sea $v \in \mathbb{S}^2$ un vector unitario cualquier. Entonces hay una constante $C = C(\Lambda)$ tal que para cualquier dominio cerrado (no necesariamente acotado) Ω del plano $\Pi = \{v\}^\perp$ y una función suave $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula en $\partial\Omega$ y cuyo grafo Σ sobre Π es una superficie Λ -CMAC, la altura de cualquier punto $p \in \Sigma$ en relación a Π es a lo más C .

La versión isotrópica del Teorema I.4.4 fue obtenida por primera vez por W. Meeks en [78], y después generalizada por J.A. Aledo, J.M. Espinar y J.A. Gálvez en [5], para clases más generales de superficies que satisfacen el Principio del Máximo, como las superficies especiales de Weingarten, es decir, superficies que satisfacen una relación $H = f(H^2 - K)$, para cierta función f , donde H y K denotan la curvatura media constante y la curvatura gaussiana de las superficies, respectivamente. Aunque el Teorema I.4.4 no proporciona acotaciones óptimas, recordamos que su versión isotrópica ha sido una herramienta fundamental para el estudio de superficies CMC propiamente embebidas. Entre las consecuencias de estas acotaciones de altura para grafos están la inexistencia de superficies CMC propiamente embebidas con un solo final, como mencionamos anteriormente en el segundo párrafo, y que cualquier superficie CMC propiamente embebida de dos finales es una superficie de revolución.

Nuestra principal dificultad en la prueba del Teorema I.4.4 reside en el hecho de que el funcional $\mathcal{F}$ no es necesariamente invariante bajo reflexiones. En otras palabras, si Π es un plano y Σ es una superficie CMAC, entonces la imagen de Σ bajo la reflexión sobre Π no es necesariamente una superficie CMAC, ya que los valores de F en un punto y su imagen reflejada pueden ser distintos. Este hecho prohíbe el uso del Método de los Planos Móviles de Alexandrov, que fue empleado en la prueba de la versión isotrópica del Teorema I.4.4.

Como corolario del Teorema I.4.4, demostramos acotaciones uniformes para superficies compactas con CMAC no nula y borde plano.

Corolario I.4.5. Suponga que la función de anisotropía F es invariante bajo la reflexión en $\mathbb{S}^2$ que fija la geodésica $\mathbb{S}^2 \cap \{v\}^\perp$, para algún $v \in \mathbb{S}^2$. Sea Σ cualquier superficie Λ -CMAC ($\Lambda \neq 0$) compacta, embebida en $\mathbb{R}^3$ y con borde contenido en el plano $\{v\}^\perp$. Entonces existe una constante positiva C que depende solo de Λ , de modo que la altura de cualquier punto $p \in \Sigma$ en relación a $\{v\}^\perp$ es a lo más C .

Bajo cierta hipótesis de simetría sobre la función de anisotropía y probando una versión anisotrópica del famoso Lema de Separación de Meeks (véanse [78] y [67]), podemos demostrar la inexistencia de superficies propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media anisotrópica constante y con solo un final.

Teorema I.4.6. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie Λ -CMAC ($\Lambda \neq 0$) propiamente embebida con topología finita y a lo más un final. Considere tres vectores linealmente independientes $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ y suponga además que la función de anisotropía F es invariante bajo las reflexiones en $\mathbb{S}^2$ que fijan las geodésicas $\mathbb{S}^2 \cap \{v_i\}^\perp$, para $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, salvo homotecias, Σ es la forma de Wulff.

Organizamos la segunda parte de esta tesis en dos capítulos. En el capítulo tres damos atención a la introducción de los conceptos básicos sobre la teoría de las superficies de curvatura media anisotrópica constante. En la primera sección presentamos el problema variacional, cuyos puntos críticos son nuestro objeto de interés. Para caracterizar estos puntos críticos en términos de la función de anisotropía y la curvatura media, recordamos la primera fórmula de variación, que nos lleva a la definición de la curvatura media anisotrópica de una superficie. A continuación, presentamos la forma de Wulff, relacionando su construcción geométrica con su descripción analítica. Esto nos permite, en la siguiente sección, definir los análogos anisotrópicos de la aplicación normal de Gauss y la segunda forma fundamental. En particular, la curvatura media anisotrópica de una superficie estará dada por la traza de la segunda forma fundamental anisotrópica. Se incluyó una breve sección con ejemplos de superficies CMAC, donde el lector puede hacer una comparación entre los casos isotrópico y anisotrópico. A saber, recordamos la construcción de superficies de rotación CMAC, helicoides CMAC y cilindros CMAC. Este último, en especial, jugará un papel crucial en los resultados obtenidos en el próximo capítulo.

Las pruebas de los principales resultados de esta tesis, a saber, los Teoremas I.4.1, I.4.3 y I.4.4, son los contenidos del Capítulo cuatro. Para superar las dificultades relacionadas con el Método de los Planos Móviles, seguimos las ideas que se encuentran en [15]. Primero, adaptamos un Teorema de Compacidad para superficies CMAC con segunda forma fundamental acotada y cuyas curvaturas medias anisotrópicas convergen a un número real prefijado. Este resultado nos permite obtener superficies CMAC completas como límites de secuencias de superficies CMAC sobre conjuntos compactos, y se aplicará a lo largo de todo el capítulo. Otro resultado útil que adaptamos de [15] fue acotaciones a priori de la segunda forma fundamental para superficies CMAC cuya curvatura media anisotrópica está acotada por una constante prefijada y cuya aplicación de Gauss omite un disco de área prefijada. Un paso clave para su prueba fue el uso de un Teorema tipo-Bernstein para superficies minimales anisotrópicas, debido a H.B. Jenkins (ver [62]), que también recordamos en el texto. También demostramos acotaciones de diámetro horizontal en el sentido de [78], es decir, acotaciones de diámetro para las componentes conexas de cortes horizontales de gráficos CMAC definidos en dominios cerrados y que se anulan en el borde. Estas acotaciones solo dependen de la curvatura media anisotrópica. Su prueba se basa en las ideas de [5]. Siguiendo estos resultados auxiliares, damos una prueba del Teorema I.4.1. Aunque la versión isotrópica del Teorema I.4.1 se prueba utilizando argumentos sobre la armonicidad de la aplicación de Gauss N de la superficie y las propiedades de la ecuación $\Delta N + \|dN\|^2 N = 0$ (donde Δ denota el operador Laplaciano de la superficie), nuestra prueba es geométrica y parte de ella se basa en las ideas encontradas en [51]. Al juntar el Teorema I.4.1 y los resultados auxiliares, podemos probar el Teorema I.4.4 y sus consecuencias, incluyendo el estudio de superficies CMAC propiamente embebidas en $\mathbb{R}^3$ con topología finita, donde concluimos con la demostración del Teorema I.4.6.

Finalmente, para la conveniencia del lector, agregamos un apéndice detallado sobre el Principio del Máximo. Recordamos el Principio Máximo para operadores diferenciales elípticos de segundo orden lineales y cuasi-lineales y establecemos una versión geométrica del Principio del Máximo, conocido como Principio de Tangencia, para el operador de curvatura media anisotrópica.

Part I

PSEUDO-PARALLEL IMMERSIONS IN $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ AND $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Chapter 1

Preliminaries and basic notations

The idea of this chapter is to recall basic notions of Submanifold Theory and fix the notation we use along this work. For the reader interested in a detailed introduction to Submanifold Theory we recomend [28].

1.1 Basics of Submanifold Theory

Let M^n and $\tilde{M}^m$ be two smooth manifolds of dimensions n and m , respectively, with $m > n$. We say that a smooth map $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ is an **immersion** if its differential $df(x) = f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \tilde{M}$ is injective, for all $x \in M^n$. Two particular cases have special names: when $n = 2$ we say that f is an **immersed surface**; when $n + 1 = m$ we say that f is an **immersed hypersurface**.

An immersion $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ between two Riemannian manifolds (M^n, g) and $(\tilde{M}^m, \tilde{g})$ is said to be an **isometric immersion** if

$$\tilde{g}(f_*X, f_*Y) = g(X, Y),$$

for all $x \in M^n$ and for all $X, Y \in T_x M$.

If $(\tilde{M}^m, \tilde{g})$ is a Riemannian manifold and $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ is an immersion, then f induces a Riemannian metric $f^*\tilde{g}$ on M^n by

$$(f^*\tilde{g})_x(X, Y) = \tilde{g}_{f(x)}(f_*X, f_*Y), \quad x \in M^n, \quad X, Y \in T_x M.$$

In this case $f : (M^n, f^*\tilde{g}) \rightarrow (\tilde{M}^m, \tilde{g})$ becomes an isometric immersion.

From now until the end of this section we consider $f : (M^n, g) \rightarrow (\tilde{M}^m, \tilde{g})$ an isometric immersion, $\{X_1, \dots, X_n\}$ a local frame of M^n and define $g_{ij} = g(X_i, X_j)$. In terms of this frame, any vector W can be written as $\sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(W, X_i) X_j$, where $[g^{ij}]$ is the inverse matrix of $[g_{ij}]$.

We denote the tangent bundles of M and $\tilde{M}$ respectively by TM and $T\tilde{M}$, and $f^*T\tilde{M}$ refers to the vector bundle over M^n whose fiber at x is $T_{f(x)}\tilde{M}$. The orthogonal complement of $f_*T_x M$ in $T_{f(x)}\tilde{M}$ is called the normal space of f at x and is denoted by $N_f M(x)$. The normal bundle of f is the vector subbundle of $f^*T\tilde{M}$ whose fiber at a point $x \in M^n$ is $N_f M(x)$. Smooth sections of TM , also called tangent vector fields of M^n , are denoted by $\mathfrak{X}(M)$ while sections of $N_f M$, also called normal vector fields to f , are denoted by $\Gamma(N_f M)$.

The Levi-Civita connection $\tilde{\nabla}$ of $\tilde{M}^m$ induces a connection $\hat{\nabla}$ on $f^*T\tilde{M}$ by the relation

$$\hat{\nabla}_X Z = \tilde{\nabla}_{f_*X}(Z \circ f),$$

for every $x \in M^n$, $X \in T_x M$ and $Z \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$.

We always identify $\hat{\nabla}$ and $\tilde{\nabla}$, and use $\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ instead of $\hat{\nabla}_X f_*Y$. Given vector fields $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, we can decompose $\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ as

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y = (\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y)^T + (\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y)^\perp$$

with respect to the orthogonal direct sum

$$f^*T\tilde{M} = f_*TM \oplus N_fM.$$

It is easy to check that $\nabla_X Y = (f_*)^{-1}(\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y)^T$ defines a compatible torsion-free connection on TM , which must therefore coincide with the Levi-Civita connection of M^n . The application $\alpha : T_x M \times T_x M \rightarrow N_fM(x)$ defined by

$$\alpha(X, Y) = (\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y)^\perp,$$

is called the **second fundamental form** of f at x . Notice that α is symmetric, since $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$ is tangent, for every $X, Y \in T_x M$. Thus, we have the **Gauss formula**:

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad (1.1.1)$$

The **Weingarten operator** of f at $x \in M^n$ with respect to $\xi \in N_fM(x)$ is defined by

$$g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(\alpha(X, Y), \xi), \quad X, Y \in T_x M.$$

If $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and $\xi \in \Gamma(N_fM)$, then

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{f_*X} \xi, f_*Y) = -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y) = -\tilde{g}(\xi, \alpha(X, Y)) = g(A_\xi X, Y),$$

whence we conclude that $-f_*A_\xi X$ is the tangent part of $\tilde{\nabla}_{f_*X} \xi$. On the other hand, the normal component

$$\nabla_X^\perp \xi = (\tilde{\nabla}_{f_*X} \xi)^\perp, \quad X \in TM, \xi \in N_fM,$$

defines a torsion-free connection $\nabla^\perp$ in N_fM compatible with $\tilde{g}$, called the **normal connection** of f . Thus, we have the **Weingarten formula**:

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} \xi = -f_*A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi(X, Y). \quad (1.1.2)$$

The **mean curvature vector** of f at $x \in M^n$ is the normal vector defined by

$$\mathcal{H} = \frac{1}{n} \text{trace } \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \alpha(X_i, X_j).$$

In terms of the Weingarten operator, we have

$$n\tilde{g}(\mathcal{H}, \xi) = \text{trace } A_\xi = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(A_\xi X_i, X_j).$$

When f is a hypersurface, a smooth unit normal vector field $N \in N_fM$ is locally unique, up to sign. In this case we write the Gauss and Weingarten formulas as

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y = f_*\nabla_X Y + g(A_N X, Y)N,$$

and

$$\tilde{\nabla}_{f_*X} N = -f_*A_N X,$$

respectively, and the mean curvature vector of f can be written as

$$\mathcal{H}(x) = H(x)N(x), \quad x \in M^n,$$

where the quantity $H(x)$ is called the **mean curvature** of f at x , with respect to N .

For a given Riemannian manifold (M^n, g) , we denote curvature tensor at $x \in M^n$ by R and adopt the convention:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in T_x M.$$

The sectional curvature of M^n with respect to $\text{span}\{X, Y\} \subset T_x M$ is expressed by

$$K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

We denote the curvature tensor of the normal bundle $N_f M$ by $R^\perp$, and it is given by

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi \in \Gamma(N_f M).$$

When $R^\perp = 0$ on M^n we say that f has **flat normal bundle**, or f has **vanishing normal curvature**.

If R , $\tilde{R}$ and $R^\perp$ are the curvature tensors of TM , $T\tilde{M}$ and $N_f M$, respectively, from Gauss and Weingarten formulas we can deduce three important equations, called **compatibility equations** of the isometric immersion f .

GAUSS EQUATION:

$$(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z)^T = f_*R(X, Y)Z + A_{\alpha(X, Z)}Y - A_{\alpha(Y, Z)}X;$$

CODAZZI EQUATION:

$$(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

where

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X^\perp Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X^\perp Z),$$

or, equivalently, Codazzi Equation is:

$$(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)\xi)^\perp = \nabla_Y A_\xi X - \nabla_X A_\xi Y - A_\xi[X, Y];$$

RICCI EQUATION:

$$(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y), \quad (1.1.3)$$

for $X, Y, Z \in T_x M$ and $\xi \in N_f M(x)$.

The sectional curvature of M^n with respect to $\text{span}\{X, Y\} \subset T_x M$ can be computed extrinsically through Gauss Equation. It becomes

$$K(X, Y) = \tilde{K}(f_*X, f_*Y) + \frac{\tilde{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) - \tilde{g}(\alpha(X, Y), \alpha(X, Y))}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \quad (1.1.4)$$

1.2 Space forms and the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

A space form is a simply connected, complete, Riemannian manifold with constant sectional curvature. It is well known that, up to homotheties there are only three examples of space forms: the n -dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$, with vanishing sectional curvature everywhere; the n -dimensional sphere $\mathbb{S}^n$ given by

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\},$$

whose sectional curvature is 1 everywhere; and the n -dimensional hyperbolic space $\mathbb{H}^n$, given by

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}; -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = -1, x_1 > 0\},$$

whose sectional curvature is -1 everywhere. Here $\mathbb{L}^{n+1}$ is the $(n+1)$ -dimensional Minkowski space, that is, the $(n+1)$ -dimensional euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ endowed with the inner product

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i.$$

We adopt the following notation to represent a space form: $\mathbb{Q}_\epsilon^n$ refers to either $\mathbb{S}^n$ or $\mathbb{H}^n$ according to whether $\epsilon = 1$ or $\epsilon = -1$, respectively. Some works also consider the case $\epsilon = 0$ when they are referring $\mathbb{Q}_0^n$ as the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. In this work we always assume that $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

In order to make computations in these manifolds, it is convenient to consider the inclusion $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, where $\mathbb{E}^{n+1}$ stands for either Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ or Lorentzian space $\mathbb{L}^{n+1}$, according as $\epsilon = 1$ or $\epsilon = -1$, respectively. Identifying $T_x \mathbb{E}^{n+1}$ with $\mathbb{E}^{n+1}$ itself, the outward pointing normal vector of $\mathbb{Q}_\epsilon^n$ at $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ is the position vector $i(x) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. With respect to the position vector, i is umbilical and its second fundamental form at x is given by

$$\alpha^i(X, Y) = -\epsilon \langle X, Y \rangle i(x), \quad X, Y \in T_x \mathbb{Q}_\epsilon^n.$$

Denoting by D the Levi-Civita connection of $\mathbb{E}^{n+1}$, we can recover the Levi-Civita connection $\bar{\nabla}$ of $\mathbb{Q}_\epsilon^n$ through Gauss formula for the immersion i . Explicitly,

$$i_* \bar{\nabla}_X Y = D_{i_* X} i_* Y - \alpha^i(X, Y) = D_{i_* X} i_* Y + \epsilon \langle X, Y \rangle i,$$

for $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_\epsilon^n)$.

The first part of this thesis is devoted to the study of submanifolds with $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ as the ambient space. Let $\frac{\partial}{\partial t}$ be the canonical unit vector field tangent to the second factor of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, that is, $\frac{\partial}{\partial t}(x, t) = c'(0)$, where $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is the vertical line $c(s) = (x, t + s)$. Considering the canonical inclusion $k := i \times Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$, the outward pointing unit normal vector of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{E}^{n+2}$ is given by $\zeta(x, t) = (i(x), 0)$. With respect to ζ , the second fundamental form of k at (x, t) is given by the relations:

$$\alpha^k(X, Y) = -\epsilon \langle X, Y \rangle \zeta, \quad \alpha^k \left(X, \frac{\partial}{\partial t} \right) = 0, \quad \text{and} \quad \alpha^k \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = 0,$$

for $X, Y \in \{\frac{\partial}{\partial t}\}^\perp$. We can recover the Levi-Civita connection $\tilde{\nabla}$ of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ through the Gauss formula as:

$$k_* \tilde{\nabla}_X Y = D_{k_* X} k_* Y - \alpha^k(X, Y) = D_{k_* X} k_* Y + \epsilon(\langle X, Y \rangle - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) \zeta,$$

for $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R})$.

For a given isometric immersion $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, it is convenient to consider the following decomposition of $\frac{\partial}{\partial t}$ in its tangent and normal parts:

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_* T + \cos \theta \eta, \quad (1.2.1)$$

for some smooth function θ defined on M , some vector field $T \in \mathfrak{X}(M)$ and some unit normal vector field $\eta \in N_f M$. We remark this expression is well defined only locally, since M^m could not be orientable. This is not a problem since we are interested in a local study of the submanifolds of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$.

In our study of pseudo-parallel submanifolds of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ we make use of the Compatibility Equations in two special cases: when f is a hypersurface (i.e. $m = n$) and when f is a surface (i.e. $m = 2$). For the first case, denoting by A_η^f its Weingarten operator in the η direction, the Compatibility Equations was derived in [40]. They are:

GAUSS EQUATION:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \epsilon(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle) \\ &\quad + \langle A_\eta^f X, W \rangle \langle A_\eta^f Y, Z \rangle - \langle A_\eta^f X, Z \rangle \langle A_\eta^f Y, W \rangle, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

CODAZZI EQUATION:

$$\nabla_X A_\eta^f Y - \nabla_Y A_\eta^f X - A_\eta^f [X, Y] = \epsilon \cos \theta (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y), \quad (1.2.3)$$

and more two equations can be derived:

3th COMPATIBILITY EQUATION:

$$\nabla_X T = \cos \theta A_\eta^f X, \quad (1.2.4)$$

4th COMPATIBILITY EQUATION:

$$X(\cos \theta) = -\langle A_\eta^f X, T \rangle. \quad (1.2.5)$$

Consider now a surface $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ and let $\{e_1, e_2\}$ be an orthonormal local frame for M^2 . Set $\alpha_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. By δ_{ij} we mean the Kronecker's Delta. The Compatibility Equations for a submanifold of $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ of any codimension was first derived in [79]. Adapting those equations to the surface case, they become:

GAUSS EQUATION:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_k &= \epsilon(\delta_{2k}e_1 - \delta_{1k}e_2 - \langle e_2, T \rangle \langle e_k, T \rangle e_1 + \delta_{1k} \langle e_2, T \rangle T \\ &\quad - \delta_{2k} \langle e_1, T \rangle T + \langle e_1, T \rangle \langle e_k, T \rangle e_2) + A_{\alpha_{2k}}^f e_1 - A_{\alpha_{1k}}^f e_2. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

CODAZZI EQUATION:

$$(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_k) - (\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_1, e_k) = \epsilon(\delta_{1k} \langle e_2, T \rangle - \delta_{2k} \langle e_1, T \rangle) \cos \theta \eta. \quad (1.2.7)$$

RICCI EQUATION:

$$R^\perp(e_1, e_2)\xi = \alpha(e_1, A_\xi^f e_2) - \alpha(A_\xi^f e_1, e_2), \quad (1.2.8)$$

for $\xi \in \Gamma(N_f M)$.

1.3 Rotation hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Now, let us recall the definition of a rotational hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Consider a three-dimensional vector subspace P^3 of $\mathbb{E}^{n+2}$ which contains the x_{n+2} -axis and $P^2 \subset P^3$ a vector subspace which also contains the x_{n+2} -axis. Denote by $\mathcal{I}$ the group of isometries of $\mathbb{E}^{n+2}$ which leave $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ invariant and leave P^2 pointwise fixed. Finally, let γ be a curve in $\mathbb{Q}_\epsilon^1 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \cap P^3$ which does not intersect P^2 . We define the rotation hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with profile curve γ and axis P^2 as the $\mathcal{I}$ -orbit of γ .

Up to an isometry of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, we can assume that P^3 is spanned by the canonical vectors $\{e_1, e_{n+1}, e_{n+2}\} \subset \mathbb{E}^{n+2}$.

An interesting characterization of rotation hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ was obtained by F. Dillen, J. Fastenakels and J. Van der Veken in [40] and later generalized for arbitrary codimension by B. Mendonça and R. Tojeiro in [80].

Theorem 1.3.1. (see [40] and [80]) *If $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is a hypersurface whose Weingarten operator is given by:*

$$A_\eta^f = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{with} \quad A_\eta^f T = \lambda T,$$

then, f is a rotation hypersurface.

It is worth to mention that in [80] Theorem 1.3.1 was proved under the extra unnecessary assumption that $\mu = \mu(\lambda)$ that appears in [40].

1.4 Hypersurfaces with a canonical principal direction

In [101], the hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ for which T is everywhere a principal direction and $\cos \theta$ is nowhere vanishing were classified as follows:

Theorem 1.4.1. (See [101]) *Let $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ be a hypersurface and let $g_s : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ be the family of its parallel hypersurfaces, that is, g_s is given in terms of the relation*

$$\tilde{g}_s(x) = C_\epsilon(s)\tilde{g}(x) + S_\epsilon(s)\tilde{N}(x), \quad (1.4.1)$$

where N is an unit normal vector field to g ,

$$C_\epsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{if } \epsilon = 1 \\ \cosh(s), & \text{if } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{and} \quad S_\epsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{if } \epsilon = 1 \\ \sinh(s), & \text{if } \epsilon = -1, \end{cases}$$

and for the canonical inclusion $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ we define $\tilde{g}(x) = (i \circ g(x), 0)$, $\tilde{N}(x) = (N(x), 0)$ and $\tilde{g}_s(x) = (i \circ g_s(x), 0)$. Define

$$f : M^n := M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$$

by the relation

$$\tilde{f}(x, s) = \tilde{g}_s(x) + a(s)k_* \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.4.2)$$

for some smooth function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nowhere vanishing derivative, where $k = (i \times Id_{\mathbb{R}}) : \mathbb{Q}_{\epsilon}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ is the canonical inclusion and $\tilde{f} = k \circ f$. Then, the map f defines, at regular points, a hypersurface that has T as a principal direction. Conversely, any hypersurface $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\epsilon}^n \times \mathbb{R}$ that has T as a principal direction and such that $\cos \theta$ is nowhere vanishing is locally given by this way.

Geometrically, $\tilde{f}(M^n)$ is obtained by parallel transporting the curve

$$s \mapsto C_{\epsilon}(s)\tilde{g}(x) + S_{\epsilon}(s)\tilde{N}(x) + a(s)k_*\frac{\partial}{\partial t}$$

of a fixed fiber $\text{span}\{\tilde{g}(x), \tilde{N}(x), k_*\frac{\partial}{\partial t}\}$ of $N_{\tilde{g}}M^{n-1}$ with respect to the normal connection of $\tilde{g}$.

In the conditions of Theorem 1.4.1, the Weingarten operators of f and g_s are related by (see [101], pg.207):

$$A_{\eta}^f X = -\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} A_{N_s}^{g_s} X, \quad \forall X \in TM^{n-1}, \quad (1.4.3)$$

and the principal curvature in the $\frac{\partial}{\partial s}$ -direction is $\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}}$, where

$$N_s = -\epsilon S_{\epsilon}(s)i \circ g(x) + C_{\epsilon}(s)N(x)$$

is an unit normal vector field to g_s at x . Moreover, in [101] it was proven that

$$f_*T = \frac{a'(s)}{1+a'(s)^2} f_*\frac{\partial}{\partial s}.$$

So, we conclude that $\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}}$ is the principal curvature of f with respect to T .

We recall that the number $\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}$ coincides with $\sin \theta$, which in turn is equals to $\|T\|$. Putting together these informations we conclude that the matrix of A_{η}^f has the following form:

$$A_{\eta}^f = \begin{bmatrix} \frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & -\sin \theta A_{N_s}^{g_s} \end{bmatrix}. \quad (1.4.4)$$

1.5 Classical operators

Let V be an n -dimensional vector space endowed with an inner product $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ and let $\{X_1, \dots, X_n\}$ be a generic basis of V . Define $g_{ij} = g(X_i, X_j)$. In terms of this basis, any vector $X \in V$ can be written as $\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g(X, X_i)X_j$, where $[g^{ij}]$ is the inverse matrix of $[g_{ij}]$. Consider $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a bilinear form and $\beta : V \rightarrow V$ a linear operator. The **trace** of B is the number defined by

$$\text{trace } B = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}g(BX_i, X_j),$$

and the **trace** of β as the number defined by

$$\text{trace } \beta = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\beta(X_i, X_j).$$

Let (M^n, g) be a Riemannian manifold. Consider $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function. The **gradient** of u is the unique vector field on M^n that satisfies:

$$g(\text{grad}_M u, X) = X(u).$$

At some point $x \in M^n$, we can write the gradient of u in terms of a generic basis $\{X_1, \dots, X_n\}$ of $T_x M$ as:

$$\text{grad}_M u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(\text{grad}_M u, X_i) X_j = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} X_i(u) X_j,$$

We also define the symmetric bilinear form $\text{Hess}_M u : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, that we call the **Hessian** of u by the following relation:

$$\text{Hess}_M u(X, Y) = X(Y(u)) - \nabla_X Y(u).$$

Given a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$, we define the divergence of X at $x \in M^n$ as

$$\text{div}_M(X) = \text{trace}(Z \mapsto \nabla_Z X) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(\nabla_{X_i} X, X_j).$$

An useful property of the divergence is the product rule: for a smooth function u defined on M^n and a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ we have

$$\text{div}_M(uX) = u \text{div}_M(X) + g(X, \text{grad}_M u).$$

We also recall the classical Divergence Theorem.

Proposition 1.5.1. Let (M^n, g) be an oriented Riemannian manifold (with or without boundary). Denote by η the co-normal vector field along ∂M pointing outward and $\tilde{g}$ the induced Riemannian metric on ∂M . Then

$$\int_M \text{div}_M X dV_g = \int_{\partial M} g(X, \eta) dV_{\tilde{g}},$$

where dV_g and $dV_{\tilde{g}}$ are the volume forms of (M, g) and $(\partial M, \tilde{g})$, respectively.

Finally, for a smooth function $u : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, its **Laplacian** is defined by:

$$\begin{aligned} \Delta_M u &= \text{div}_M(\text{grad}_M u) = \text{trace}(\text{Hess}_M(u)) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(\nabla_{X_i} \text{grad}_M u, X_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \{X_i(X_j(u)) - \nabla_{X_i} X_j(u)\}. \end{aligned}$$

For the Laplacian operator we have a similar product rule: given smooth functions u, v defined on M^n , it is valid that

$$\Delta_M(uv) = u\Delta_M v + v\Delta_M u + 2g(\text{grad}_M u, \text{grad}_M v).$$

Chapter 2

Pseudo-parallel immersions in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

In this chapter we present our study of pseudo-parallel immersions in the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. First section begins with precise definitions of the intrinsic and extrinsic notions that motivates the introduction of the concept of pseudo-parallelism. We also recall some characterization and classification theorems concerning semi-parallel hypersurfaces in space forms and in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, which will be useful in our study of pseudo-parallel hypersurfaces. In the second section we present the characterization of pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with at least three distinct principal curvatures, and discuss the relation between pseudo-symmetric and pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Third section is devoted to present the geometric description of pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with three distinct principal curvatures, and putting our results together with the partial results obtained in [70], we are able to give the Classification Theorem of pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. We also present a classification of pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ that are minimal and of constant mean curvature. The next two sections concern the study of the surface case, where we prove a characterization theorem, and in particular the non-existence of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ with non-vanishing normal curvature. Finally, we give examples of semi-parallel surfaces which are not parallel as well as examples of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ which are neither semi-parallel nor pseudo-parallel surfaces in a slice, and we exhibit examples of pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, for $n \geq 4$.

2.1 Semi-parallel and pseudo-parallel submanifolds

In this section we recall the notions that appear along this chapter, and in particular the concept of pseudo-parallel immersions, the topic of our interest. We also include some classification results obtained by other authors. We begin by defining some classes of Riemannian manifolds that generalize space forms. These intrinsic notions motivated the classes of submanifolds we are interested in.

Definition 2.1.1. A Riemannian manifold M^n is said to be:

1. *Locally-symmetric* if

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) = 0; \quad (2.1.1)$$

2. *Semi-symmetric* if

$$(R(X, Y) \cdot R)(U, V, W) = 0; \quad (2.1.2)$$

3. *Pseudo-symmetric* if

$$(R(X, Y) \cdot R)(U, V, W) = \phi[(X \wedge Y) \cdot R](U, V, W), \quad (2.1.3)$$

for some smooth real-valued function ϕ on M^n and for any vectors X, Y, Z, U, V and W tangent to M^n .

Here the notation means

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z, W) &= \nabla_X R(Y, Z)W - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W \\ &\quad - R(Y, Z)\nabla_X W; \\ (R(X, Y) \cdot R)(U, V, W) &= R(X, Y)R(U, V)W - R(R(X, Y)U, V)W \\ &\quad - R(U, R(X, Y)V)W - R(U, V)R(X, Y)W; \\ [(X \wedge Y) \cdot R](U, V, W) &= (X \wedge Y)R(U, V)W - R((X \wedge Y)U, V)W \\ &\quad - R(U, (X \wedge Y)V)W - R(U, V)(X \wedge Y)W. \end{aligned}$$

Geometrical meanings of local, semi- and pseudo-symmetry can be found in [48] and [19] (see exercise 8.14). Locally-symmetric manifolds were first studied in the 1920's by E. Cartan, whose investigation has lead to the development of the theory of semi-symmetric manifolds (see [23]). It is clear that locally-symmetric manifolds are semi-symmetric, but the converse is not true. E. Cartan and H. Takagi present examples of semi-symmetric manifolds that are not locally-symmetric (see [98]).

After years of investigation by various mathematicians, semi-symmetric submanifolds were finally classified in the 1980's by Z.I. Szabó (see [96] and [97]). Meanwhile, other mathematicians started to investigate umbilical submanifolds in semi-symmetric ambient-spaces. From these studies originated the concept of pseudo-symmetry, introduced initially by R. Deszcz in [37]. Obvious examples of pseudo-symmetric manifolds are the semi-symmetric ones. However, these classes are not equal, and examples of pseudo-symmetric manifolds that are not semi-symmetric can be found in [37] and in the references therein.

The attempt to obtain an extrinsic theory analogous to the one we just mentioned motivates the definition of extrinsic notions as local-, semi- and pseudo-parallelism, that we present in Definition 2.1.2. In particular, these classes of immersions generalize the concept of total geodesy. From the view point of isometric immersions, the study of these classes of submanifolds permit us to compare different ambient spaces and improve our understanding of their geometry.

Definition 2.1.2. An isometric immersion $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ is said to be:

1. *Totally geodesic* if

$$\alpha(X, Y) = 0; \quad (2.1.4)$$

2. *Umbilical* if the mean curvature vector field $\mathcal{H}$ of f satisfies

$$\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \mathcal{H}; \quad (2.1.5)$$

3. *Locally-parallel* if

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = 0; \quad (2.1.6)$$

4. *Semi-parallel* if

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha)(Z, W) = 0; \quad (2.1.7)$$

5. *Pseudo-parallel* if

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha)(Z, W) = \phi[(X \wedge Y) \cdot \alpha](Z, W), \quad (2.1.8)$$

for some smooth real-valued function ϕ on M^n and for any vectors X, Y, Z and W tangent to M^n .

Here the notation means

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) &= \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z); \\ (\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha)(Z, W) &= R^\perp(X, Y)[\alpha(Z, W)] - \alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W); \\ [(X \wedge Y) \cdot \alpha](Z, W) &= -\alpha((X \wedge Y)Z, W) - \alpha(Z, (X \wedge Y)W). \end{aligned}$$

The concepts of total geodesy and umbilicity are well known in the literature: an isometric immersion $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ is totally geodesic if and only if the image of any geodesics of M^n by f is also a geodesic of $\tilde{M}^m$. Umbilical submanifolds are the simplest submanifolds apart totally geodesic ones. The image of an umbilical immersion is equally curved in all tangent directions. We can find geometrical meanings of local-, semi- and pseudo-parallelism in [103].

Locally-parallel immersions were introduced by Ferus in [44], in the Euclidean space, which also obtained a classification of such immersions in the Euclidean space and in the spheres while in the hyperbolic spaces two classifications were obtained independently by Backes-Reckziegel (see [11]) and Takeuchi (see [99]). We also mention H.B. Lawson, who classified locally-parallel hypersurfaces in the spheres before the definition of this class of submanifolds had been introduced, as we can see in [69]. In [33] J. Deprez introduced the notion of semi-parallelism. It is clear that locally-parallel immersions are also semi-parallel, but these classes are not equal, since examples of semi-parallel submanifolds that are not locally-parallel can be found in [33], where a classification of semi-parallel hypersurfaces in the Euclidean space was also given. For space forms with non-zero sectional curvature, a classification of semi-parallel hypersurfaces was obtained by F. Dillen in [41]. The notion of pseudo-parallelism was first introduced by A. Asperti, G.A. Lobos and F. Mercuri in [9]. The obvious examples of pseudo-parallel submanifolds are the semi-parallel ones, but there are pseudo-parallel immersions that are not semi-parallel. Examples can be found in [9] and [10]. Also in [10] we can find a classification of pseudo-parallel hypersurfaces in space-forms: they are either quasi-umbilical hypersurfaces or cyclids of Dupin.

When the ambient space is a space form, locally-parallel immersions are locally-symmetric as well semi-parallel and pseudo-parallel immersions are semi-symmetric and pseudo-symmetric, respectively. In other words, local, semi- and pseudo-parallelism are extrinsic analogue of local, semi- and pseudo-symmetry, respectively. Unfortunately, it does not occur when we consider $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ as the ambient space. For example, as we will see in Remark 2.2.5, in these ambient spaces umbilical hypersurfaces are semi-parallel but not necessarily semi-symmetric. We prove that pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ are pseudo-symmetric (see Corollary 2.2.4).

Since we are interested in the spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, where the sectional curvature of the first factor is non-zero, we present here the results of F. Dillen, that we will use later. The first useful result is a characterization of semi-parallel hypersurfaces of space forms in terms of the Weingarten operator.

Proposition 2.1.3. (see [41]) Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$ ($\epsilon \neq 0$) be a hypersurface. The following assertions are equivalent:

- (1) f is semi-parallel;
- (2) the Weingarten operator of f at each point $x \in M^n$ has the following form:

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \mu & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad \text{with } \lambda\mu = -\epsilon \quad \text{or} \quad \lambda = \mu. \quad (2.1.9)$$

The following result is the Classification Theorem of semi-parallel hypersurfaces of space forms.

Theorem 2.1.4. (see [41]) Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+1}$ be a semi-parallel hypersurface. Then there are three possibilities:

- (1) $n = 2$ and M^2 is flat;
- (2) f is a parallel immersion. Thus, $f(M^n)$ is an open part of $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$ (resp. $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$) if $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$), for some $0 \leq k \leq n$ and some c_1, c_2 satisfying $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \epsilon$.
- (3) f is a rotation surface (in the sense of [20]) whose profile curve is a helix.

Considering $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ as the ambient space, the first studies of parallel and semi-parallel immersions started with J. Van der Veken, L. Vrancken in [102] and G. Calvaruso, D. Kowalczyk and J. Van der Veken in [16], where a classification of the hypersurface case was obtained. One interesting conclusion of their work was that total umbilicity does not imply parallelism, a fact that do occur in space forms. Indeed, if $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is an umbilical hypersurface, the parallelism condition gives

$$0 = (\nabla_X A_N) = \nabla_X A_N Y - A_N \nabla_X Y = X(\lambda)Y,$$

for all $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, whence we conclude that λ is constant on M^n . On the other hand, using Codazzi Equation we have

$$0 = \epsilon \cos \theta (\langle T, T \rangle X - \langle X, T \rangle T) = \epsilon \cos \theta \|T\|^2 X$$

for $X \neq 0$ orthogonal to T . When $\cos \theta = 0$, we conclude that $f(M^n)$ is an open part a vertical cylinder $g(M^{n-1}) \times \mathbb{R}$, for some hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$. In particular, f is totally geodesic, since one of its principal curvatures is zero. When $\|T\|^2 = 0$, we conclude that $f(M^n)$ is an open part of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t_0\}$, for some $t_0 \in \mathbb{R}$. Again, f is totally geodesic.

Semi-parallel hypersurfaces were classified based on the characterization of their Weingarten operators, an idea that we also use in this work. The most interesting case that appeared is when the Weingarten operator has two distinct eigenvalues, being one of them of multiplicity one and T as related principal direction, and with an additional condition on the product of them. In such case, Theorem 1.3.1 was of fundamental importance. The Classification Theorem of semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is:

Theorem 2.1.5. (see [102] and [16]) Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a semi-parallel hypersurface. Then:

- (i) $n = 2$ and M^2 is flat;
- (ii) f is umbilical,
- (iii) $f(M^n)$ is an open part of a rotation surface in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ whose profile curve is either a vertical line or it is parametrized by

$$\gamma(s) = \left(\cos s, 0, \dots, 0, \sin s, \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2 \sigma - 1} d\sigma \right), \quad \text{if } \epsilon = 1 \text{ and}$$

$$P^2 = \text{span}\{e_1, e_{n+2}\}; \text{ or, for } \epsilon = -1,$$

$$\gamma(s) = \left(\cosh s, 0, \dots, 0, \sinh s, \int_{s_0}^s \sqrt{C \cosh^2 \sigma - 1} d\sigma \right), \quad \text{if } P^2 = \text{span}\{e_1, e_{n+2}\};$$

$$\gamma(s) = \left(\cosh s, 0, \dots, 0, \sinh s, \int_{s_0}^s \sqrt{C \sinh^2 \sigma - 1} d\sigma \right), \quad \text{if } P^2 = \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}\};$$

$$\gamma(s) = \left(s, 0, \dots, 0, \frac{-1}{2s}, \int_{s_0}^s \sqrt{C - \frac{1}{2\sigma^2}} d\sigma \right), \quad \text{if } P^2 = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_{n+1}), e_{n+2}\right\},$$

where P^2 is the axis of f .

- (iv) there exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R}$ and $f(x, t) = (g(x), t)$, for $x \in M^{n-1}$ and $t \in \mathbb{R}$. In other words, $f(M^n)$ is an open part of a vertical cylinder over a semi-parallel hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n$.

2.2 Pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

In this section we present an improvement of the third case of Lemma 3.1 in [70], concerning the Weingarten operator of a pseudo-parallel hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with at least three distinct eigenvalues. We also discuss the relation between pseudo-parallel and pseudo-symmetric hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$.

We begin with a general assumption we will adopt along the section. Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a hypersurface and consider $U = V \cup \text{int}(M^n - V)$, where $V = \{x \in M^n; \theta(x) \neq 0\}$. It is easy to see that U is open and dense on M^n and for each connected component U_γ of U we have either $U_\gamma \subset V$ or $U_\gamma \subset \text{int}(M^n - V)$. If $x \in \text{int}(M^n - V)$ then $\frac{\partial}{\partial t}$ is orthogonal to f on a small neighborhood of x and we conclude that $f(M)$, in such a neighborhood, is an open part of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t_0\}$, for some $t_0 \in \mathbb{R}$, that is, a totally geodesic hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. So, from now on we will assume that θ is nowhere vanishing.

Next, we have the following remark:

Remark 2.2.1. From the definition of pseudo-parallelism we can deduce that any surface $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^2 \times \mathbb{R}$ is pseudo-parallel by taking ϕ as the Gaussian curvature of M^2 . Also, it is well known that the curvature tensor of a Riemannian manifold M^n with constant sectional curvature c is given by $R(X, Y)Z = c(X \wedge Y)Z$, and consequently any hypersurface $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is pseudo-parallel with $\phi = c$.

The following lemma is an improvement of Lemma 3.1 in [70].

Lemma 2.2.2. Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface with at least three eigenvalues. Then the Weingarten operator A_η^f of f has exactly three eigenvalues and it has the following form:

$$A_\eta^f = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \mu \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.2.1)$$

with $\phi = \epsilon \cos^2 \theta$, $\lambda\mu = -\epsilon \sin^2 \theta$ and $T = \|T\|e_1$.

Proof. Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface and fix a point $x \in M^n$. Let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be an orthonormal basis of $T_x M^n$ that satisfies

$$A_\eta^f e_i = \lambda_i e_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In this basis we write

$$T = \sum_{i=1}^n T_i e_i.$$

The pseudo-parallelism condition is equivalent to the following equations

$$(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i \lambda_j + \epsilon(1 - (T_i)^2 - (T_j)^2)) - \phi = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\epsilon(\lambda_i - \lambda_k)T_j T_k = 0, \quad \forall i \neq j \neq k \neq i. \quad (2.2.3)$$

Recall we are assuming that $T \neq 0$, otherwise we know that $f(M^n)$ is just a totally geodesic slice $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t_0\}$, for some $t_0 \in \mathbb{R}$. As a consequence, $\cos^2 \theta \neq 1$.

If $\lambda_i \neq \lambda_j$ are distinct eigenvalues of A_η^f , one of the following situations necessarily occurs:

Situation 1: $T \notin \text{span}\{e_i, e_j\}$. In this case, there exists $k \in \{1, \dots, n\} - \{i, j\}$ such that $T_k \neq 0$. By equation (2.2.3), we conclude that $T_i = T_j = 0$. So, $T \perp \text{span}\{e_i, e_j\}$. In particular, by equation (2.2.2), we have that $\lambda_i \lambda_j = -\epsilon + \phi$.

Situation 2: $T \in \text{span}\{e_i, e_j\}$. Using equation (2.2.2) we get $\lambda_i \lambda_j = -\epsilon \cos^2 \theta + \phi$.

With these conditions, we analyse the number of eigenvalues, their multiplicities and prove that T is a principal direction. Let us suppose that A_η^f has at least three distinct eigenvalues, λ , μ and ν . We define A , B and C the sets of indexes corresponding to ν , λ and μ , respectively. We know from Situations 1 and 2 that $\lambda\mu, \lambda\nu, \mu\nu \in \{-\epsilon \cos^2 \theta + \phi, -\epsilon + \phi\}$. So, at least two of these products are equal. If none of them is zero, and for example $\lambda\nu = \mu\nu$, we conclude that $\lambda = \mu$, a contradiction. Therefore, one of them must be zero. Moreover, we have proven that A_η^f admits at most two eigenvalues which are not zero. So, we can suppose that A_η^f has exactly three distinct eigenvalues, λ , μ and $\nu = 0$.

Because of $\lambda\nu = \mu\nu = 0$, $0 \neq \lambda\mu$ and $0, \lambda\mu \in \{-\epsilon \cos^2 \theta + \phi, -\epsilon + \phi\}$, we have two cases to consider:

Case 1: $0 = -\epsilon \cos^2 \theta + \phi$. In particular $\lambda\mu = -\epsilon + \phi$. Since $\lambda\nu = \mu\nu = 0 = -\epsilon \cos^2 \theta + \phi$, by Situation 2 we have that $T \in \text{span}\{e_i, e_j\}$, $\forall i \in A$, $\forall j \in B \cup C$. But this occurs only if $\text{card}(A) = 1$. So we conclude that 0 has multiplicity one and $T = \|T\|e_1$.

Case 2: $0 = -\epsilon + \phi$. In particular, $\lambda\nu = \mu\nu = 0 = -\epsilon + \phi$. By Situation 1 we have that $T \perp \text{span}\{e_i, e_j\}$, $\forall i \in A$, $\forall j \in B \cup C$. But this implies $T = 0$, which is a contradiction. $\square$

Remark 2.2.3. A hypersurface $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is ψ -pseudo-symmetric if, and only if, for every distinct indexes $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ we have:

$$T_j T_k (\lambda_i - \lambda_k) (\lambda_j - \lambda_l) = 0, \quad (2.2.4)$$

$$T_j T_k (\epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda_j \lambda_k - \psi) = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} & [\epsilon(1 - T_i^2 - T_j^2) + \lambda_i \lambda_j - \psi] (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_k \\ & - \epsilon(T_i^2 - T_j^2) [\epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda_i \lambda_j - \psi] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Corollary 2.2.4. Any pseudo-parallel hypersurface in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is pseudo-symmetric.

Proof. Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a ϕ -pseudo-parallel immersion. By Lemma 2.2.2, T is a principal direction and we can suppose $T = \|T\|e_1$. With this simplification, the pseudo-parallelism condition becomes

$$(\epsilon + \lambda_i \lambda_j - \phi) (\lambda_i - \lambda_j) = 0, \quad (2.2.7)$$

$$(\epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda_1 \lambda_j - \phi) (\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad (2.2.8)$$

for $i, j > 1$ mutually distinct. Analogously, the pseudo-symmetry condition with $\psi = \phi$ becomes:

$$(\epsilon + \lambda_i \lambda_j - \phi) (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_1 = 0, \quad (2.2.9)$$

$$(\epsilon + \lambda_i \lambda_j - \phi) (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_k = 0, \quad (2.2.10)$$

$$(\epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda_1 \lambda_j - \phi) (\epsilon\|T\|^2 - (\lambda_1 - \lambda_j) \lambda_k) = 0, \quad (2.2.11)$$

for $i, j, k > 1$ mutually distinct. Putting (2.2.7) and (2.2.8) together with (2.2.9), (2.2.10) and (2.2.11) and assuming that $T \neq 0$ we obtain the following condition,

$$\epsilon\|T\|^2 (\epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda_1 \lambda_j - \phi) = 0, \quad \forall j > 1. \quad (2.2.12)$$

If f is not umbilical, item (ii) in Lemma 3.1 of [70] and Lemma 2.2.2 imply that $\lambda_1 \neq \lambda_j$, for all $j \in \{2, \dots, n\}$. Using (2.2.8) we get (2.2.12). If f is umbilical, we know f is ϕ -pseudo-parallel for any function ϕ . In this case we choose $\phi = \epsilon(1 - \|T\|^2) + \lambda^2$ and conclude again that f is ϕ -pseudo-symmetric. $\square$

Remark 2.2.5. Although in space forms semi-parallelism is an extrinsic analogous to semi-symmetry (a fact proved by J. Deprez and F. Dillen, see [33] and [41]), from the proof of Corollary 2.2.4 we see that this is not true for hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, since in these ambient spaces umbilical hypersurfaces are semi-parallel but not semi-symmetric in general.

2.3 Classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

In this section we prove the main result of the chapter and exhibit the classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$.

Theorem 2.3.1. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface with three distinct principal curvatures. Then, $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R}$ and there exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that either $f(x, s) = (g(x), s)$ or f is given by equation (1.4.2) in terms of g and a linear function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nowhere vanishing derivative.*

Proof. By Lemma 2.2.2 we know that T is a principal direction of f .

If $\cos \theta$ vanishes identically, then f is semiparallel and $T = \frac{\partial}{\partial t}$ is tangent everywhere to f . In this case $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{R}$ and there exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that $f(x, s) = (g(x), s)$ (see item (iv) in Theorem 2.1.5).

Assume now that $\cos \theta$ is nowhere vanishing. Theorem 1.4.1 yields that there exists a hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that f is given by equation (1.4.2) in terms of g and a function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with non-vanishing derivative.

Since $X(\cos \theta) = -\langle A_\eta^f X, T \rangle = 0$, for all $X \in TM^n$, we have that $\cos \theta$ is constant over M^n . By Corollary 2 in [101] we conclude that $a(s)$ is a linear function. By Lemma 2.2.2 the product of the non zero principal curvatures of f is constant and equal to $-\epsilon \sin^2 \theta$. Using this information in equation (1.4.3), we conclude that $A_{N_s}^{g_s}$ has two distinct principal curvatures whose product is constant in x and also in s and it is equals to $-\epsilon$, since $a'(s)/\sqrt{1 + a'(s)^2} = \sin \theta$ (see equation 8 in [101]). By Proposition 2.1.3 we conclude that g is a semi-parallel hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n$. $\square$

Remark 2.3.2. An interesting class of hypersurfaces $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ consists of those for which θ is constant on M^n . Such hypersurfaces are called **constant angle hypersurfaces**. It is worth to mention that constant angle hypersurfaces were fully described by R. Tojeiro in [101]. Namely, if $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is a constant angle hypersurface, then $M^n = M^{n-1} \times I$ and there exists a hypersurfaces $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ for which f is given either by $f(x, s) = (g(x), s)$ or by equation (1.4.2), in terms of a linear function $a : I \rightarrow \mathbb{R}$. Moreover, the converse is true. In particular, in the statement of Theorem 2.3.1, the pseudo-parallel hypersurface f is a constant angle hypersurface.

With respect to pseudo-parallel hypersurfaces in $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with exactly two principal curvatures, Lemma 3.1 in [70] provides that one of the principal curvatures has multiplicity one and T is its corresponding principal direction. By Theorem 1.3.1, we conclude that f is a rotation hypersurface. In the next proposition we prove indeed that any rotation hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is pseudo-parallel.

Proposition 2.3.3. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a rotation hypersurface. Then f is pseudo-parallel with $\phi(s) = \lambda(s)\mu(s) + \epsilon \cos^2 \theta(s)$, where λ and μ are its principal curvatures.*

Proof. Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a rotation hypersurface. By Theorem 1.3.1, its Weingarten operator is given by $\text{diag}(\lambda, \mu, \dots, \mu)$, and we conclude this proof taking $\phi(s) = \lambda(s)\mu(s) + \epsilon \cos^2 \theta(s)$ in (2.2.2). $\square$

Putting together Remark 2.2.1, the results obtained in [70], Theorem 2.3.1 and Proposition 2.3.3, the Classification Theorem of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ can be stated as follows.

Theorem 2.3.4 (Classification Theorem). *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel hypersurface. Then one of the following occurs:*

- (i) $n = 2$ and ϕ is the Gaussian curvature;
- (ii) f is umbilical;
- (iii) f is a rotation hypersurface;
- (iv) $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is given by $f(x, s) = (g(x), s)$, for a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$;

- (v) *There exists a semi-parallel hypersurface $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ such that $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is given by equation (1.4.2) in terms of g and a linear function $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nowhere vanishing derivative.*

Remark 2.3.5. An interesting class of hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ consists of those that have constant sectional curvature, and as we observed in Remark 2.2.1, such hypersurfaces are also pseudo-parallel. We could ask how these hypersurfaces fit in the Classification Theorem. We recall that constant sectional curvature hypersurfaces in product spaces were investigated by other authors. The surface case were studied by J. Aledo, J.M. Espinar and J.A. Gálvez, in [3] and [4]. Among their results there are uniform height estimates for compact graphs and a proof of the nonexistence of complete surfaces of constant Gaussian curvature $c \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ in $\mathbb{S}^2(1) \times \mathbb{R}$ and $c < -1$ in $\mathbb{H}^2(-1) \times \mathbb{R}$. For $n \geq 3$, a full classification of constant sectional curvature hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ was obtained by F. Manfio and R. Tojeiro in [81]. It was proven that for $n \geq 4$, constant sectional curvature hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ must be open subsets of rotation hypersurfaces. Nonrotational examples appear when $n = 3$, but all of them have 0 as a principal curvature in the T -direction, and they can be constructed by means of Theorem 1.4.1 (see section 6 in [81]). The totally geodesic slice $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \{0\}$ has constant sectional curvature ϵ and appears in case (ii), while a flat surface $g : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ is semi-parallel and it gives rise (through equation (1.4.2)) to a flat hypersurface in case (iv). We conclude from these works that we have examples of constant sectional curvature hypersurfaces for each case appearing in Theorem 2.3.4.

As a consequence of Theorem 2.3.4, we can classify all pseudo-parallel hypersurfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ which have constant mean curvature.

Corollary 2.3.6. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) be a pseudo-parallel hypersurface with constant mean curvature. Then f is either totally geodesic, a rotation hypersurface with constant mean curvature, or it is given as in item (iv) of Theorem 2.3.4, where $g(M^{n-1})$ is an open part of $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$ (resp. $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$) if $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$), for some real constants c_1, c_2 satisfying $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \epsilon$ and some $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

Proof. If $\cos \theta$ vanishes identically, f is given as in item (iv) of Theorem 2.3.4. Then g is semi-parallel and has constant mean curvature. It follows easily that either g is umbilical or isoparametric (i.e. its principal curvatures are constant) with two distinct principal curvatures (see Proposition 2.1.3). In the first case, f is a rotation hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ whose profile curve is a vertical line. In the second case, $g(M^{n-1})$ is an open part of $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$ (resp. $\mathbb{H}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2)$) if $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$), for some c_1, c_2 satisfying $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \epsilon$ and some $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Thus, we can suppose that $\cos \theta$ is nowhere vanishing.

When f is umbilical, its unique principal curvature is constant over M^n . Using Codazzi's equation for $X \in \{T\}^\perp$, we conclude that:

$$0 = \cos \theta (\langle T, T \rangle X - \langle X, T \rangle T) = \cos \theta \sin^2 \theta X.$$

Then, $\sin \theta$ vanishes identically and $f(M)$ is an open part of a totally geodesic slice $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t_0\}$, for some real constant t_0 .

When f has exactly two distinct principal curvatures, it is a rotation hypersurface with constant mean curvature. An explicit expression of the profile curve is obtained using the formulas of Theorem 3 in [101].

Finally, we suppose that f has exactly three distinct principal curvatures. Then f is given as in item (v) of Theorem 2.3.4. As we observed in the proof of Theorem 2.3.1, the

parallels g_s of g are all semi-parallel. Therefore the product of the principal curvatures of g_s is equals to $-\epsilon$. Moreover, since $\cos \theta$ is constant, from equation (1.4.3) we conclude that the mean curvature of g_s is constant on x and s . Using these two informations, we conclude that the principal curvatures of g_s are constant on x and s .

On the other hand, by a direct computation, the principal curvatures $\hat{\lambda}(x)$ and $\hat{\mu}(x)$ of g_s are related with the principal curvatures $\tilde{\lambda}(x)$ and $\tilde{\mu}(x)$ of g at $x \in M^{n-1}$ by the following expression (see [81]):

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{\epsilon + \cot_\epsilon(s)\tilde{\lambda}(x)}{\cot_\epsilon(s) - \tilde{\lambda}(x)}, \quad \hat{\mu}(x) = \frac{\epsilon + \cot_\epsilon(s)\tilde{\mu}(x)}{\cot_\epsilon(s) - \tilde{\mu}(x)},$$

where $\cot_\epsilon(s) := \frac{C_\epsilon(s)}{S_\epsilon(s)}$. Thus, imposing that $\hat{\lambda}(x)$ and $\hat{\mu}(x)$ are constant on x and s , we conclude that $\hat{\lambda}(x)\hat{\mu}(x) = \epsilon$, which is a contradiction. $\square$

In particular, we have also a classification of minimal pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$.

Corollary 2.3.7. *Let $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ ($n \geq 3$) be a pseudo-parallel hypersurface. If f is minimal, then f is either a totally geodesic hypersurface, a minimal rotation hypersurface, or $\epsilon = 1$ and f is given as in item (iv) of Theorem 2.3.4, where $g(M^{n-1})$ is an open part of $\mathbb{S}^k(\frac{n-1}{k}) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(\frac{n-1}{n-k-1})$ for some $k \in \{1, \dots, n-2\}$.*

Proof. We observe that when $\cos \theta$ vanishes identically it is known that minimal semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{H}^n(-1)$ are totally geodesic (see Corollary 6.3 in [9]). We also recall that minimal rotation hypersurfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ were classified in [40] (see Theorems 6 and 7). The rest of the proof is similar to the proof of Corollary 2.3.6. $\square$

Remark 2.3.8. The converse statement of Corollary 2.2.4 is false. For example, let $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ be a semi-symmetric hypersurface which is not semi-parallel. Such hypersurfaces do exist and for $n \geq 4$ its Weingarten operator has the following form: $\text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$. By taking $f : M^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ given by $f(x, s) = (g(x), s)$, according to equations (2.2.4)-(2.2.6) we obtain a semi-symmetric (and in particular pseudo-symmetric) hypersurface of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. But since g is not semi-parallel, by item (iv) of Theorem 2.3.4 we conclude that f is not pseudo-parallel.

2.4 Pseudo-parallel surfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

In this section we prove some auxiliary results concerning pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, that will be useful later.

Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel surface, $\{e_1, e_2\}$ be an orthonormal frame and $\alpha_{ij} := \alpha(e_i, e_j)$, where α is the second fundamental form of f . It follows from Ricci Equation that

$$R^\perp(e_1, e_2)\xi \in \text{span}\{\alpha(X, Y); X, Y \in TM\}, \quad \text{for all } \xi \in N_f M.$$

Thus, equation (1.2.8) is equivalent to the following equation:

$$R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{ij} = \langle \alpha_{12}, \alpha_{ij} \rangle (\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ij} \rangle \alpha_{12}. \quad (2.4.1)$$

On the other hand, the condition of pseudo-parallelism is equivalent to the following two equations:

$$R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{ii} = (-1)^i 2(K - \phi)\alpha_{12}, \quad (2.4.2)$$

$$R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{12} = (K - \phi)(\alpha_{11} - \alpha_{22}), \quad (2.4.3)$$

where

$$K = \epsilon(1 - \|T\|^2) + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle - \|\alpha_{12}\|^2 \quad (2.4.4)$$

is the Gaussian curvature of M^2 . As a consequence, we have the next lemma.

Lemma 2.4.1. *Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a pseudo-parallel surface. Then, the mean curvature vector field H of f satisfies $R^\perp(X, Y)H = 0$, for all $X, Y \in TM$.*

Proof. Immediate by equation (2.4.2), since $H = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{22})$. $\square$

Proposition 2.4.2. *Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a surface with flat normal bundle. Then f is a pseudo-parallel immersion.*

Proof. Since f has flat normal bundle, by equations (2.4.2) and (2.4.3) we conclude that f is ϕ -pseudo-parallel by taking $\phi = K$, where K is the Gaussian curvature of M^2 . $\square$

In the following, we have two propositions that are useful to construct examples of pseudo-parallel surfaces.

Proposition 2.4.3. *Let $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ be an isometric immersion and let $j : \mathbb{Q}_\epsilon^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a totally geodesic immersion. If f is ϕ -pseudo-parallel, then $j \circ f$ is ϕ -pseudo-parallel.*

Proof. In this proof, we denote the second fundamental form of f and $j \circ f$ respectively by α^f and $\alpha^{j \circ f}$. In the same way, we denote the normal curvature tensors of f and $j \circ f$ respectively by $R_f^\perp$ and $R_{j \circ f}^\perp$. Since j is a totally geodesic immersion, we have the following relations:

$$\begin{aligned} \alpha^{j \circ f}(Z, W) &= j_* \alpha^f(Z, W), \\ R_{j \circ f}^\perp(X, Y) \alpha^{j \circ f}(Z, W) &= j_* R_f^\perp(X, Y) \alpha^f(Z, W), \end{aligned}$$

Therefore, applying Definition 2.1.8 we obtain

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y) \cdot \alpha^{j \circ f})(Z, W) &= R_{j \circ f}^\perp(X, Y) \alpha^{j \circ f}(Z, W) - \alpha^{j \circ f}(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad - \alpha^{j \circ f}(Z, R(X, Y)W) \\ &= j_* R_f^\perp(X, Y) \alpha^f(Z, W) - j_* \alpha^f(R(X, Y)Z, W) \\ &\quad - j_* \alpha^f(Z, R(X, Y)W) \\ &= \phi \{ -j_* \alpha^f((X \wedge Y)Z, W) - j_* \alpha^f(Z, (X \wedge Y)W) \} \\ &= \phi \{ -\alpha^{j \circ f}((X \wedge Y)Z, W) - \alpha^{j \circ f}(Z, (X \wedge Y)W) \} \\ &= \phi[(X \wedge Y) \cdot \alpha^{j \circ f}](Z, W). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.4.4. *Let $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be an isometric immersion and let $j : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+l} \times \mathbb{R}$ be a totally geodesic immersion. If f is ϕ -pseudo-parallel, then $j \circ f$ is ϕ -pseudo-parallel.*

Proof. It is analogous to the proof of Proposition 2.4.3. $\square$

2.5 Characterization of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

In this section we present our main result concerning pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. To do so, we begin by recalling the concepts of ellipse of curvature and isotropic surfaces, in the sense of B. O'Neill (see [83]), and the relation between them.

Let $f : M^2 \rightarrow \tilde{M}^m$ ($m \geq 4$) be any surface, with second fundamental form $\alpha : TM \times TM \rightarrow N_f M$. Consider $\{e_1, e_2\}$ an orthonormal frame in M^2 and define $\alpha_{ij} := \alpha(e_i, e_j)$. If $x \in M^2$ and $X \in T_x M$ with $\|X\| = 1$, we can write $X = \cos t e_1 + \sin t e_2$, for some $t \in [0, 2\pi)$. In this way,

$$\begin{aligned}
 \alpha(X, X) &= \alpha(\cos t e_1 + \sin t e_2, \cos t e_1 + \sin t e_2) = \cos^2 t \alpha_{11} + 2 \cos t \sin t \alpha_{12} + \sin^2 t \alpha_{22} \\
 &= \left(\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2}\right) + \left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right) \alpha_{11} + \sin(2t) \alpha_{12} + \left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right) \alpha_{22} \\
 &= H(x) + \left(\frac{1}{2} - \sin^2 t\right) \alpha_{11} + \sin(2t) \alpha_{12} + \left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right) \alpha_{22} \\
 &= H(x) + \left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right) (\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \sin(2t) \alpha_{12} \\
 &= H(x) + \frac{1}{2} \cos(2t) (\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \sin(2t) \alpha_{12}, \tag{2.5.1}
 \end{aligned}$$

where $H(x)$ denotes the mean curvature vector of f at x .

Thus, if $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$ is linearly independent, the map $t \mapsto \alpha(\cos t e_1 + \sin t e_2, \cos t e_1 + \sin t e_2)$ parametrizes an ellipse centered at $H(x)$, in the affine plane spanned by the vectors $\alpha_{11} - \alpha_{22}$ and α_{12} , that passes through $H(x)$. By this reason, we are motivated to call the set $\{\alpha(X, X); X \in T_x M \text{ with } \|X\| = 1\}$ as the **ellipse of curvature** of f at x . Notice that in this definition, the ellipse of curvature could also be degenerated, like a line segment or a point. Also, it is worth to mention that the ellipse of curvature of f at $x \in M^2$ is a circle if and only if for some (and hence for any) orthonormal basis $\{e_1, e_2\}$ of $T_x M$ it holds that

$$\langle \alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \|\alpha_{11} - \alpha_{22}\| = 2\|\alpha_{12}\| > 0.$$

Recalling the definition by B. O'Neill (see [83]), a surface $f : M^2 \rightarrow \tilde{M}^m$ is called **λ -isotropic** if there exists a non-negative smooth function $\lambda : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that for each $x \in M^2$ and $X \in T_x M$ with $\|X\| = 1$, we have $\|\alpha(X, X)\| = \lambda(x)$. In the following proposition we discuss briefly the relation between the concepts of isotropy and the ellipse of curvature.

Proposition 2.5.1. Let $f : M^2 \rightarrow \tilde{M}^{4+p}$ ($p \geq 0$) be a surface. If f is λ -isotropic, then either:

- i. f is umbilical, in the case where $R^\perp = 0$, or;
- ii. if f has non-vanishing normal curvature, its ellipse of curvature at each point $x \in M^2$ is a circle with center $H(x)$, which lies in a 2-dimensional affine subspace of $N_f M(x)$ orthogonal to the vector $H(x)$ and whose radius $r(x) > 0$ satisfies $\lambda(x)^2 = r(x)^2 + \|H(x)\|^2$.

In particular, if $p = 0$ in the last case, we also conclude that f is minimal. The converse is also true.

Proof. First, let us assume that f is λ -isotropic and fix an arbitrary point $x \in M^2$. To simplify the proof we also assume that an orthonormal basis $\{e_1, e_2\}$ of $T_x M^2$ is chosen in such a way that $\langle \alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle = 0$, which is always possible, up to a rotation of $\{e_1, e_2\}$.

We have that

$$2\langle H(x), \alpha_{11} - \alpha_{22} \rangle = \langle \alpha_{11} + \alpha_{22}, \alpha_{11} - \alpha_{22} \rangle = \|\alpha_{11}\|^2 - \|\alpha_{22}\|^2 = \lambda(x)^2 - \lambda(x)^2 = 0.$$

On the other hand, if $X = \cos t e_1 + \sin t e_2 \in T_x M^2$ denotes any unit tangent vector and $y(t) := \frac{1}{2} \cos(2t)(\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \sin(2t)\alpha_{12}$, from equation (2.5.1) we have that $\alpha(X, X) = H(x) + y(t)$ and consequently

$$\lambda(x)^2 = \|H(x) + y(t)\|^2 = \|H(x)\|^2 + 2\langle H(x), y(t) \rangle + \|y(t)\|^2, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R} \quad (2.5.2)$$

In particular, applying equation (2.5.2) for $t = \frac{\pi}{4}$ and $t = \frac{-\pi}{4}$, we deduce that $\langle H(x), \alpha_{12} \rangle = 0$. In other words, $H(x)$ is orthogonal to $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$. This also implies that $\langle H(x), y(t) \rangle = 0$, for all $t \in \mathbb{R}$, and consequently

$$\lambda(x)^2 = \|H(x)\|^2 + \|y(t)\|^2, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

Thus the map $t \mapsto \|y(t)\|$ is constant.

By rewriting Ricci Equation (1.1.3) as $R^\perp(e_1, e_2) = (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \wedge \alpha_{12}$, we see that f has non-vanishing normal curvature if and only if $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$ is linearly independent. Then, if f has flat normal bundle, since we are assuming $\langle \alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle = 0$, at least one of these vectors is zero, but from the fact that $t \mapsto \|y(t)\|$ is constant, we conclude that both are zero, which means that f is umbilical. On the other hand, if f has non-vanishing normal curvature, in particular $\|y(\frac{\pi}{4})\| = \|\alpha_{12}\| > 0$, whence we conclude that the ellipse of curvature of f at x is a circle centered at $H(x)$, lying in an affine plane of $N_f M(x)$ orthogonal to $H(x)$, whose radius $r(x) > 0$ satisfies $r(x)^2 = \lambda(x)^2 - \|H(x)\|^2$. If, in particular, $p = 0$ in this last case, since $H(x)$ is orthogonal to the plane spanned by $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$, we conclude that $H(x) = 0$.

Now we assume that for all $x \in M^2$ the ellipse of curvature of f at x is a circle of radius $r(x) > 0$ centered at $H(x)$, lying in an affine plane of $N_f M(x)$ that is orthogonal to the vector $H(x)$. Then, for all $t \in \mathbb{R}$ we have that $y(t) := \frac{1}{2} \cos(2t)(\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \sin(2t)\alpha_{12}$ has norm $r(x)$ and is orthogonal to $H(x)$. Thus,

$$\begin{aligned} \|\alpha(\cos t e_1 + \sin t e_2, \cos t e_1 + \sin t e_2)\|^2 &= \|H(x) + y(t)\|^2 \\ &= \|H(x)\|^2 + 2\langle H(x), y(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \\ &= \|H(x)\|^2 + r(x)^2, \end{aligned}$$

for all $t \in \mathbb{R}$, whence we deduce that f is λ -isotropic with $\lambda(x)^2 = \|H(x)\|^2 + r(x)^2$.

Finally, if f is umbilical, by definition $\alpha(X, X) = H(x)$, for any unit tangent vector, which implies that f is λ -isotropic with $\lambda(x)^2 = \|H(x)\|^2$. $\square$

Now we present our main result, which is a characterization of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with nowhere vanishing normal curvature.

Theorem 2.5.2. *Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ be a ϕ -pseudo-parallel surface with nowhere vanishing normal curvature. Then f is λ -isotropic and*

$$r(x)^2 = K(x) - \phi(x) > 0, \quad \forall x \in M^2 \quad (2.5.3)$$

$$\lambda^2 = 4K - 3\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) > 0, \quad (2.5.4)$$

$$\|H\|^2 = 3K - 2\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) \geq 0, \quad (2.5.5)$$

where K denotes the Gaussian curvature, λ is a smooth real-valued function on M^2 , $r(x)$ is the radius of the ellipse of curvature of f at $x \in M^2$, H is the mean curvature vector field of f and T is the tangent part of $\frac{\partial}{\partial t}$, the canonical unit vector field tangent to the second factor of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Conversely, if f is λ -isotropic then f is pseudo-parallel.

Proof. Let us suppose that $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ is pseudo-parallel with non-vanishing normal curvature. Combining equations (2.4.1) to (2.4.4) we get

$$\langle \alpha_{12}, \alpha_{ii} \rangle (\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \{2(-1)^{i+1}(K - \phi) + \langle \alpha_{ii}, \alpha_{22} - \alpha_{11} \rangle\} \alpha_{12} = 0, \quad (2.5.6)$$

$$\{\|\alpha_{12}\|^2 + (\phi - K)\}(\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle \alpha_{12} = 0. \quad (2.5.7)$$

From the assumption that f has non-vanishing normal curvature, and rewritting Ricci Equation (1.1.3) as $R^\perp(e_1, e_2) = (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \wedge \alpha_{12}$, we conclude that $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$ is linearly independent. Using this fact and equations (2.5.6) and (2.5.7) we obtain

$$\langle \alpha_{12}, \alpha_{11} \rangle = \langle \alpha_{12}, \alpha_{22} \rangle = 0, \quad (2.5.8)$$

$$\langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ii} \rangle = (-1)^i 2(K - \phi), \quad (2.5.9)$$

$$\|\alpha_{12}\|^2 = K - \phi > 0. \quad (2.5.10)$$

From equation (2.4.4) we get

$$\langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle = 2K - \phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1), \quad (2.5.11)$$

$$\|\alpha_{11}\|^2 = \|\alpha_{22}\|^2 = 4K - 3\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1) > 0, \quad (2.5.12)$$

$$\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\|^2 = 4(K - \phi) > 0, \quad (2.5.13)$$

$$\|H\|^2 = 3K - 2\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1). \quad (2.5.14)$$

In particular, since $(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \perp \alpha_{12}$ and $\|\alpha_{11} - \alpha_{22}\| = 2\|\alpha_{12}\| > 0$, the ellipse of curvature of f at x is a circle. By equations (2.5.8) and (2.5.9) we may also deduce that $H(x)$ is orthogonal to $\{\alpha_{11} - \alpha_{22}, \alpha_{12}\}$. Therefore, from Proposition 2.5.1 we conclude that f is λ -isotropic with $\lambda^2 = 4K - 3\phi + \epsilon(\|T\|^2 - 1)$, and the radius $r(x)$ of the ellipse of curvature of f at x satisfies $r(x)^2 = K(x) - \phi(x)$.

Conversely, let us assume that f is λ -isotropic. Set $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. Then

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \|\alpha(X, X)\|^2 \\ &= (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \lambda^2 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle \\ &\quad + 4 \sin^3 \theta \cos \theta \langle \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle + 4 \sin \theta \cos^3 \theta \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle \\ &\quad + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \|\alpha_{12}\|^2. \end{aligned}$$

Since λ does not depend on θ , taking the derivative with respect to θ we get

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\lambda^2}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} (\|\alpha(X, X)\|^2) \Big|_{\theta=0} = 4 \langle \alpha_{11}, \alpha_{12} \rangle, \\ 0 &= \frac{d\lambda^2}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{d}{d\theta} (\|\alpha(X, X)\|^2) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -4 \langle \alpha_{22}, \alpha_{12} \rangle. \end{aligned}$$

On the other hand, with $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ we get

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \|\alpha(Y, Y)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \{2\lambda^2 + 4\|\alpha_{12}\|^2 + 2\langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle\}, \end{aligned}$$

that is,

$$\lambda^2 = 2\|\alpha_{12}\|^2 + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle.$$

Using this and Gauss Equation we get

$$\|\alpha_{12}\|^2 = \frac{1}{3}\{\lambda^2 - K + \epsilon(1 - \|T\|^2)\}.$$

From the Ricci Equation $R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{ii} = \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ii} \rangle \alpha_{12}$, $i = 1, 2$, we obtain

$$\begin{aligned} R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{ii} &= \langle \alpha_{22} - \alpha_{11}, \alpha_{ii} \rangle \alpha_{12} \\ &= (-1)^i 2\|\alpha_{12}\|^2 \alpha_{12} \\ &= (-1)^i \frac{2}{3}\{\lambda^2 - K + \epsilon(1 - \|T\|^2)\} \alpha_{12}, \end{aligned}$$

Using the Ricci Equation once more we obtain

$$\begin{aligned} R^\perp(e_1, e_2)\alpha_{12} &= \|\alpha_{12}\|^2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \\ &= \frac{1}{3}\{\lambda^2 - K + \epsilon(1 - \|T\|^2)\}(\alpha_{11} - \alpha_{22}). \end{aligned}$$

Therefore, taking $\phi = \frac{4K - \lambda^2 + \epsilon(\|T\|^2 - 1)}{3}$, we conclude that f is pseudo-parallel according to equations (2.4.2) and (2.4.3). $\square$

As a consequence of Theorem 2.5.2, we have the following non-existence result:

Corollary 2.5.3. There is no pseudo-parallel surface $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ with nowhere vanishing normal curvature.

The following result we recall is due to M. Sakaki (see [91]), and it plays a vital role in the proof of Corollary 2.5.3.

Theorem 2.5.4. (see [91]) *Let $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ be a minimal surface with $\epsilon \neq 0$. If the ellipse of curvature of f is a circle at any point $x \in M^2$, then f is totally geodesic.*

Now we are ready to prove Corollary 2.5.3.

Proof of Corollary 2.5.3. Suppose that a surface $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ as in the statement do exist. Since f has non flat normal bundle, for any $x \in M^2$ we have that $R^\perp(x)(e_1, e_2) : N_f M(x) \rightarrow N_f M(x)$ is a non zero anti-symmetric linear operator, defined in a two-dimensional vector space. Thus, by Lemma 2.4.1 we conclude that $H(x) = 0$. But from Theorem 2.5.4, we conclude that f is totally geodesic and in particular, $R^\perp(x) = 0$, which is a contradiction. $\square$

2.6 Some examples

We now introduce the first examples of semi-parallel and pseudo-parallel surfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ which are not locally-parallel and semi-parallel, respectively, and that are not just inclusions of surfaces of $\mathbb{Q}_\epsilon^3$ into $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$.

Example 2.6.1. A general construction of submanifolds of $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ with flat normal bundle and T as a principal direction can be found in [80], by Mendonça-Tojeiro. For our purpose, based on this work, the construction becomes: let $g : J \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3$ be a regular curve and $\{\xi_1, \xi_2\}$ an orthonormal set of vector fields normal to g . Put

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= i \circ j \circ g, \\ \tilde{\xi}_k &= i_* j_* \xi_k, \quad \text{for } k \in \{1, 2\}, \\ \tilde{\xi}_0 &= \tilde{g}, \quad \tilde{\xi}_3 = i_* \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}$$

where $j : \mathbb{Q}_\epsilon^3 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ and $i : \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^5$ are the canonical inclusions. If $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^2 \times \mathbb{R}$ is a smooth regular curve with $\alpha'_3(s) \neq 0$, $\forall s \in I$, we have the following isometric immersion $f : M^2 = J \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ given by

$$\tilde{f}(x, s) = (i \circ f)(x, s) = \sum_{k=0}^3 \alpha_k(s) \tilde{\xi}_k(x). \quad (2.6.1)$$

At regular points, f is an isometric immersion with flat normal bundle and T as a principal direction. Conversely, if $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ is an isometric immersion with flat normal bundle and T as a principal direction, then f is given by (2.6.1) for some isometric immersion $g : \mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ and some smooth regular curve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^2 \times \mathbb{R}$ whose last coordinate has non-vanishing derivative.

In particular, when dealing with pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$, at least those that have T as a principal direction are fully described by this method.

We now construct two simple examples. Let us define

$$C_\epsilon(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{if } \epsilon = 1 \\ \cosh(s), & \text{if } \epsilon = -1 \end{cases} \quad \text{and} \quad S_\epsilon(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{if } \epsilon = 1 \\ \sinh(s), & \text{if } \epsilon = -1. \end{cases}$$

(a) By taking

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= (C_\epsilon(\theta(x)), S_\epsilon(\theta(x)), 0, 0, 0), \\ \tilde{\xi}_1(x) &= (0, 0, 1, 0, 0), \quad \tilde{\xi}_2(x) = (0, 0, 0, 1, 0), \\ \alpha_0(s) &= \sqrt{1 - \epsilon d^2}, \quad \alpha_1(s) = d \cos s, \quad \alpha_2(s) = d \sin s, \quad \alpha_3(s) = s.\end{aligned}$$

where $0 < d < 1$, if $\epsilon = 1$, or $d > 0$, if $\epsilon = -1$, and $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is the smooth function given by

$$\theta(u) = \frac{u}{\sqrt{1 - \epsilon d^2}},$$

we obtain that

$$f(x, s) = (\sqrt{1 - \epsilon d^2} C_\epsilon(\theta(x)), \sqrt{1 - \epsilon d^2} S_\epsilon(\theta(x)), d \cos s, d \sin s, s).$$

Consider $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ the orthonormal frame adapted to f , given by:

$$\begin{aligned}e_1(x, s) &= \frac{f_* \partial_x}{\|f_* \partial_x\|} = (-\epsilon S_\epsilon(\theta(x)), C_\epsilon(\theta(x)), 0, 0, 0); \\ e_2(x, s) &= \frac{f_* \partial_s}{\|f_* \partial_s\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}}(0, 0, -d \sin s, d \cos s, 1); \\ e_3(x, s) &= (-\epsilon d C_\epsilon(\theta(x)), -\epsilon d S_\epsilon(\theta(x)), \sqrt{1 - \epsilon d^2} \cos s, \sqrt{1 - \epsilon d^2} \sin s, 0); \\ e_4(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + d^2}}(0, 0, -\sin s, \cos s, -d).\end{aligned}$$

Using this frame we have

$$\begin{aligned} T(x, s) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_1(x, s) \right\rangle e_1(x, s) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_2(x, s) \right\rangle e_2(x, s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_1(x, s) \right\rangle e_1(x, s) \\ &= \frac{1}{1+d^2} (0, 0, -d \sin s, d \cos s, 1), \end{aligned}$$

which implies that $1 - \|T\|^2 = \frac{d^2}{1+d^2}$. If we consider the decomposition $\alpha_{ij} = h_{ij}^3 e_3 + h_{ij}^4 e_4$, we have that

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \frac{\epsilon d}{\sqrt{1-\epsilon d^2}} & h_{22}^3 &= \frac{-d\sqrt{1-\epsilon d^2}}{1+d^2} \\ h_{12}^3 &= h_{11}^4 = h_{12}^4 = h_{22}^4 = 0. \end{aligned}$$

Thus, we may compute the Gaussian curvature of f . It becomes

$$\begin{aligned} K &= \epsilon(1 - \|T\|^2) + \langle \alpha_{11}, \alpha_{22} \rangle - \|\alpha_{12}\|^2 \\ &= \epsilon(1 - \|T\|^2) + h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{11}^4 h_{22}^4 - (h_{12}^3)^2 - (h_{12}^4)^2 \\ &= \frac{\epsilon d^2}{1+d^2} + \left(\frac{\epsilon d}{\sqrt{1-\epsilon d^2}} \right) \left(\frac{-d\sqrt{1-\epsilon d^2}}{1+d^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

According to Proposition 2.4.2, f is a semi-parallel surface in $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$. Let us see that f is not locally-parallel. To do so, consider $\tilde{\nabla}$ the Levi-Civita connection of $\mathbb{E}^5$. Since $e_2 = \frac{f_* \partial_s}{\|f_* \partial_s\|}$, we have that

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \frac{\partial e_2(x, s)}{\partial s} = \frac{1}{1+d^2} (0, 0, -d \cos s, -d \sin s, 0),$$

and as a consequence

$$\nabla_{e_2} e_2 = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_2 \rangle e_2 = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_1 = 0.$$

Thus $\nabla_{e_2} e_2 = 0$, which implies that

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_2, e_2) &= \nabla_{e_2}^\perp \alpha(e_2, e_2) - 2\alpha(\nabla_{e_2} e_2, e_2) = \nabla_{e_2}^\perp \alpha(e_2, e_2) \\ &= \nabla_{e_2}^\perp (h_{22}^3 e_3 + h_{22}^4 e_4) = \nabla_{e_2}^\perp (h_{22}^3 e_3) \\ &= e_2(h_{22}^3) e_3 + h_{22}^3 \nabla_{e_2}^\perp e_3 = h_{22}^3 \nabla_{e_2}^\perp e_3. \end{aligned}$$

But $\tilde{\nabla}_{e_2} e_4 = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \frac{\partial e_4}{\partial s} = \frac{1}{1+d^2} (0, 0, -\cos s, -\sin s, 0)$. Using this information, we obtain

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}^\perp e_3 &= \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_3, e_3 \rangle e_3 + \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_3, e_4 \rangle e_4 = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_3, e_4 \rangle e_4 \\ &= -\langle e_3, \tilde{\nabla}_{e_2} e_4 \rangle e_4 = \frac{\sqrt{1-\epsilon d^2}}{1+d^2} (-\cos^2 s - \sin^2 s) e_4 \\ &= -\frac{\sqrt{1-\epsilon d^2}}{1+d^2} e_4 \neq 0. \end{aligned}$$

Therefore f is not locally parallel.

(b) Another example can be obtained by taking $0 < d < 1$, if $\epsilon = 1$ or $d > 1$, if $\epsilon = -1$, and

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= (0, \cos(x), \sin(x), 0, 0, 0), \\ \tilde{\xi}_1(x) &= (1, 0, 0, 0, 0), \quad \tilde{\xi}_2(x) = (0, 0, 0, 1, 0), \\ \alpha_0(s) &= dS_\epsilon(s), \quad \alpha_1(s) = dC_\epsilon(s), \quad \alpha_2(s) = \sqrt{\epsilon(1-d^2)}, \quad \alpha_3(s) = s,\end{aligned}$$

In this case

$$f(x, s) = (dC_\epsilon(s), dS_\epsilon(s) \cos(x), dS_\epsilon(s) \sin x, \sqrt{\epsilon(1-d^2)}, s).$$

Now, consider $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ the orthonormal frame adapted to f given by:

$$\begin{aligned}e_1(x, s) &= \frac{f_* \partial_s}{\|f_* \partial_s\|} = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}(-\epsilon d S_\epsilon(s), dC_\epsilon(s) \cos x, dC_\epsilon(s) \sin x, 0, 1); \\ e_2(x, s) &= \frac{f_* \partial_x}{\|f_* \partial_x\|} = (0, -\sin x, \cos x, 0, 0); \\ e_3(x, s) &= (\sqrt{\epsilon(1-d^2)} C_\epsilon(s), \sqrt{\epsilon(1-d^2)} S_\epsilon(s) \cos x, \sqrt{\epsilon(1-d^2)} S_\epsilon(s) \sin x, -\epsilon d, 0); \\ e_4(x, s) &= \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}(\epsilon S_\epsilon(s), -C_\epsilon(s) \cos x, -C_\epsilon(s) \sin x, 0, d).\end{aligned}$$

As in the previous example,

$$\begin{aligned}T(x, s) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_1(x, s) \right\rangle e_1(x, s) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_2(x, s) \right\rangle e_2(x, s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_1(x, s) \right\rangle e_1(x, s) \\ &= \frac{1}{1+d^2}(-\epsilon d S_\epsilon(s), dC_\epsilon(s) \cos x, dC_\epsilon(s) \sin x, 0, 1),\end{aligned}$$

which implies that $1 - \|T\|^2 = \frac{d^2}{1+d^2}$. The coefficients of the second fundamental form in this frame becomes

$$\begin{aligned}h_{11}^3 &= \frac{-d\sqrt{\epsilon(1-d^2)}}{1+d^2} & h_{22}^3 &= \frac{-\sqrt{\epsilon(1-d^2)}}{d} & h_{22}^4 &= \frac{C_\epsilon(s)}{dS_\epsilon(s)\sqrt{1+d^2}} \\ h_{12}^3 &= h_{11}^4 = h_{12}^4 = 0.\end{aligned}$$

and the Gaussian curvature is given by

$$\begin{aligned}K &= \epsilon(1 - \|T\|^2) + h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{11}^4 h_{22}^4 - (h_{12}^3)^2 - (h_{12}^4)^2 \\ &= \epsilon(1 - \|T\|^2) + h_{11}^3 h_{22}^3 \\ &= \frac{\epsilon d^2}{1+d^2} + \left(\frac{-d\sqrt{\epsilon(1-d^2)}}{1+d^2} \right) \left(\frac{-\sqrt{\epsilon(1-d^2)}}{d} \right) = \frac{\epsilon}{1+d^2} \neq 0.\end{aligned}$$

According to Proposition 2.4.2 we deduce that the surface f is pseudo-parallel but not semi-parallel.

Question 2.6.2. Are there examples of pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^3 \times \mathbb{R}$ ($\epsilon \neq 0$) for which T is not a principal direction?

The next three examples show us that for $n > 3$ there exists pseudo-parallel surfaces with non-vanishing normal curvature.

Example 2.6.3. Let $\mathbb{S}_{1/3}^2$ be the 2-sphere of sectional curvature $\frac{1}{3}$ and consider $f : \mathbb{S}_{1/3}^2 \rightarrow \mathbb{S}^4$ the classical *Veronese surface*, given by

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}xy, \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \right),$$

which is a locally-parallel, minimal and λ -isotropic immersion (as we can see in [21], [61] and [93]) in $\mathbb{S}^4$ with non-vanishing normal curvature. If $i : \mathbb{S}^4 \rightarrow \mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}$ is the totally geodesic inclusion given by $i(x) = (x, 0)$, then by Proposition 2.4.3 we have that $i \circ f$ is a pseudo-parallel immersion in $\mathbb{S}_1^4 \times \mathbb{R}$ with non-vanishing normal curvature.

Conjecture 2.6.4. Up to isometries, there are no pseudo-parallel surfaces in $\mathbb{Q}_\epsilon^4 \times \mathbb{R}$ with non-vanishing normal curvature that are minimal besides the surface in Example 2.6.3.

Example 2.6.5. It's known by Chern in [25] that: “Any minimal immersion of a topological 2-sphere into $\mathbb{S}^4$ is a superminimal immersion”. So, by Theorem 2.5.2, we have that any minimal immersion of a topological 2-sphere into a slice $\mathbb{S}^4 \times \mathbb{R}$ with non-vanishing normal curvature is pseudo-parallel with $\phi = \frac{4K-1-\lambda^2}{3}$. Moreover, if the Gaussian curvature is not constant, the immersion is not semi-parallel.

Example 2.6.6. Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ be the surface given by

$$f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{6}}(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2u), \sin u \cos v, \sin u \sin v, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2u)),$$

where $u = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, $v = \frac{\sqrt{6}}{2}y$.

This example, that appears in [92], is a minimal λ -isotropic flat torus with $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and non-vanishing normal curvature. In particular, f is a pseudo-parallel immersion in $\mathbb{S}^5$ with $\phi = \frac{-1}{2}$.

Thus, if $i : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{S}^5 \times \mathbb{R}$ is the totally geodesic inclusion given by $i(x) = (x, 0)$, by Proposition 2.4.3 we have that $i \circ f$ is a pseudo-parallel immersion in $\mathbb{S}^5 \times \mathbb{R}$ with non-vanishing normal curvature.

Part II

CONSTANT ANISOTROPIC MEAN CURVATURE SURFACES IN $\mathbb{R}^3$

Chapter 3

Constant anisotropic mean curvature surfaces

In this chapter we present the theory of constant anisotropic mean curvature surfaces. We begin by introducing the variational problem whose critical points are the object of our study. Then we derive the first variation formula for the anisotropic area functional, that gives rise to the concept of anisotropic mean curvature, and we recall the second variation formula and the stability operator. After it, we introduce the most fundamental surface of constant anisotropic mean curvature: the Wulff shape. It is presented through a nice geometric description known as the Wulff's construction, and its algebraic formulation in terms of the function of anisotropy is also presented. In the following section we define the anisotropic Gauss map of a surface, the anisotropic analogous of the usual Gauss map, but whose range now is the Wulff shape instead the unit sphere. We can recover the anisotropic mean curvature of a surface by taking the derivative of its anisotropic Gauss map. We finish this introduction chapter showing some interesting examples. Some pictures of them and their isotropic counterparts are included. Among the examples we present the CAMC cylinders, that will play a crucial role in the next chapter.

3.1 The variational problem

Let $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth-positive function. Consider the following functional:

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_{\Sigma} F(N(x)) d\Sigma, \quad (3.1.1)$$

where $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ is an immersed hypersurface with Gauss map $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$. Notice that when $F \equiv 1$, $\mathcal{F}$ becomes the well-known area functional. We also recall the volume functional, that is given by the following relation:

$$\mathcal{V}(\psi) = \int_{\Sigma} \langle \psi(x), N(x) \rangle d\Sigma. \quad (3.1.2)$$

If $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is a bounded domain whose boundary is a finite union of smooth immersed hypersurfaces $\{\psi_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}\}_{i=1}^k$, the number $\sum_{i=1}^k \mathcal{V}(\psi_k)$ is the volume of U .

A natural question to ask is:

What are the critical points of the functional $\mathcal{F}$?

To answer this question we need to derive a variation formula for $\mathcal{F}$. A **smooth variation** (or deformation) of an immersed hypersurface $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an application of the form $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ given by

$$\Psi(t, x) = \psi(x) + s(t)\xi(x)$$

where $s : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth real-valued function with $s(0) = 0$ and $\xi : \Sigma \rightarrow T\mathbb{R}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ is a smooth vector field along Σ , called **variation vector field**. When $\xi(x) \perp \psi_*T_x\Sigma$ we say that Ψ is a normal variation.

Let $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth, oriented immersed hypersurface. To obtain a first variation formula for the functional $\mathcal{F}$ we consider a normal variation $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ of Σ given by:

$$\psi_t(x) = \Psi(t, x) = \psi(x) + tu(x)N(x).$$

where $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function with compact support and N is the Gauss map of ψ .

We recall that the first variation of the volume form $d\Sigma_t$ and the Gauss map N_t of ψ_t are given respectively by $\frac{d}{dt}d\Sigma_t = -nu(x)H(x)$ and $\frac{d}{dt}N_t(x) = -\text{grad}_\Sigma u(x)$. Using these informations together with the Divergence Theorem, the derivative of $t \mapsto \mathcal{F}(\psi_t)$ at $t = 0$ becomes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\Sigma_t) &= \frac{d}{dt} \int_\Sigma F(N_t(x))d\Sigma_t = \int_\Sigma \frac{d}{dt}F(N_t(x))d\Sigma + \int_\Sigma F(N(x))\frac{d}{dt}d\Sigma_t \\ &= \int_\Sigma \langle (\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N(x), -\text{grad}_\Sigma u(x) \rangle d\Sigma - n \int_\Sigma u(x)H(x)F(N(x))d\Sigma \\ &= - \int_\Sigma \{ \text{div}_\Sigma(u \cdot \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N \}(x) - u(x) \text{div}_\Sigma((\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N) \} d\Sigma \\ &\quad - n \int_\Sigma u(x)H(x)F(N(x))d\Sigma \\ &= - \int_{\partial\Sigma} u(x) \langle (\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N, \eta \rangle d(\partial\Sigma) + \int_\Sigma u(x) \text{div}_\Sigma((\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N)(x) d\Sigma \\ &\quad - n \int_\Sigma u(x)H(x)F(N(x))d\Sigma \\ &= - \int_\Sigma u(x) [- \text{div}_\Sigma((\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N)(x) + nF(N(x))H(x)] d\Sigma, \end{aligned}$$

that is,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\Sigma_t) = - \int_\Sigma u(x) [- \text{div}_\Sigma((\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N)(x) + nF(N(x))H(x)] d\Sigma. \quad (3.1.3)$$

Definition 3.1.1. The quantity $-\text{div}_\Sigma((\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N)(x) + nF(N(x))H(x)$ that appears in the integrand in equation (3.1.3) is called the **anisotropic mean curvature** of ψ with respect to F and N at $x \in \Sigma$. We denote this quantity by $\Lambda(x)$.

By equation (3.1.3) we obtain a conclusion: ψ is a critical point of the functional $\mathcal{F}$ if, and only if Λ vanishes identically.

In this work, we are also interested in the study of the critical points of $\mathcal{F}$ among the immersions that preserve volume. For this purpose, we have the following characterization:

Proposition 3.1.2. Let $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth positive function and let $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be a smooth, oriented immersed surface. The following three statements are equivalent:

- i. the anisotropic mean curvature Λ of ψ with respect to F is constant $\Lambda \equiv \Lambda_0$;
- ii. for any compactly supported variation ψ_t of ψ that preserves the volume we have that $\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\psi_t) = 0$;
- iii. for any compactly supported variation ψ_t of ψ we have that $\frac{d}{dt}[\mathcal{F}(\psi_t) + \Lambda_0\mathcal{V}(\psi_t)] = 0$.

To prove Proposition 3.1.2, we need the following auxiliary result.

Lemma 3.1.3. (see [75]) Let $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be an immersed hypersurface and let $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ be a piecewise smooth real-valued function with compact support satisfying $\int_{\Sigma} u(x)d\Sigma = 0$. Then there exists a normal variation ψ_t of ψ that preserves volume and such that $\frac{d}{dt}\psi_t(x) = u(x)N(x)$ at $t = 0$, where $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ is the Gauss map of ψ .

Proof of Proposition 3.1.2. We first prove that item [iii] implies item [ii]. Let ψ_t be a normal variation of ψ that preserves volume. Then $t \mapsto \mathcal{V}(\psi_t)$ is constant. Therefore $0 = \frac{d}{dt}[\mathcal{F}(\psi_t) - \Lambda_0\mathcal{V}(\psi_t)] = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\psi_t)$.

Now, let us assume that item [ii] implies item [i]. Let $p \in \Sigma$ a point and choose $D \subset \Sigma$ a relatively compact domain that contains p in its interior. We define

$$\Lambda_0 = \frac{\int_D \Lambda(x)d\Sigma}{\int_D 1d\Sigma}. \quad (3.1.4)$$

Our task is to prove that $\Lambda = \Lambda_0$ on D . Let us suppose that $\Lambda(q) \neq \Lambda_0$, for some $q \in D$. We define

$$D_+ = \{x \in D; \Lambda(x) - \Lambda_0 > 0\}, \quad \text{and} \quad D_- = \{x \in D; \Lambda(x) - \Lambda_0 < 0\}.$$

Since Λ is continuous (because H , F and N are continuous) we conclude that D_+ and D_- are open subsets of D . Without loss of generality we can assume that $q \in D_+$. By the definition of Λ_0 we have

$$\int_D \Lambda(x) - \Lambda_0 d\Sigma = 0,$$

whence we conclude that D_- is also non-empty. It is possible to choose positive smooth functions $v, w : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ such that $p \in \text{supp}(v) \subset D_+$, $\text{supp}(w) \subset D_-$ and

$$\int_D (v(x) + w(x))(\Lambda(x) - \Lambda_0)d\Sigma = 0. \quad (3.1.5)$$

Put $u := (v + w)(\Lambda - \Lambda_0)$. We have that $\text{supp}(u) \subset D_+ \cup D_-$, and in particular $u(x) = 0$ for all $x \in \partial D$. Also, by equation 3.1.5 we have that $\int_{\Sigma} u(x)d\Sigma = 0$. Using Lemma 3.1.3, there exists a normal variation ψ_t of ψ that preserves volume and satisfies

$$\frac{d}{dt}\psi_t(x) = u(x)N(x).$$

Applying the first variation formula and using the hypothesis, we conclude at $t = 0$ that

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\psi_t) = - \int_{\Sigma} u(x)\Lambda(x)d\Sigma = - \int_{\Sigma} u(x)\Lambda(x)d\Sigma + \Lambda_0 \int_{\Sigma} u(x)d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} u(x)(\Lambda(x) - \Lambda_0)d\Sigma = - \int_{\Sigma} (v(x) + w(x))(\Lambda(x) - \Lambda_0)^2 d\Sigma < 0, \end{aligned}$$

leading to a contradiction. Therefore we conclude that Λ is locally constant, and since Σ is connected, $\Lambda \equiv \Lambda_0$, proving that item [i] is valid.

Finally, assume that item [i] is valid. By the formula (3.1.3) and the first variation of the volume we have at $t = 0$ that

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} [\mathcal{F}(\psi_t) + \Lambda_0 \mathcal{V}(\psi_t)] = - \int_{\Sigma} u(x) \Lambda(x) d\Sigma + \Lambda_0 \int_{\Sigma} u(x) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} [\Lambda(x) - \Lambda_0] u(x) d\Sigma. \end{aligned}$$

Since u is a generic smooth compactly supported function on Σ , we conclude that $\Lambda(x) = \Lambda_0$, for all $x \in \Sigma$, which proves that item [iii] is valid. $\square$

Sometimes we refer a constant anisotropic mean curvature surface using the abbreviation CAMC-surface, or Λ -CAMC surface when we want to specify that its anisotropic mean curvature is Λ .

The second variation of $\mathcal{F}$ is obtained in a similar way as we did for the first variation. The computations and details can be found in [64]. Here we only recall that if $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is an immersion with constant anisotropic mean curvature Λ , the second variation formula of the functional $\mathcal{F} + \Lambda \mathcal{V}$ is given by

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}(\psi_t) &= - \int_{\Sigma} u(x) \operatorname{div}_{\Sigma}((D^2 F \circ N + F \circ N) \operatorname{grad}_{\Sigma} u)(x) d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma} \|(D^2 F_{N(x)} + F(N(x))) \cdot dN_x\|^2 u(x)^2 d\Sigma, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

where $D^2 F_y$ is the operator that represents $\operatorname{Hess}_{\mathbb{S}^n} F_y$, that is,

$$\langle D^2 F_y X, Y \rangle = \operatorname{Hess}_{\mathbb{S}^n} F_y(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_y \mathbb{S}^n.$$

This formula motivates the following definition: denoting by $C_c^\infty(\Sigma)$ the space of compactly supported smooth functions on Σ , the **stability operator** of $\mathcal{F}$ is the linear operator $L : C_c^\infty(\Sigma) \rightarrow C_c^\infty(\Sigma)$ given by:

$$Lu(x) := \operatorname{div}_{\Sigma}((D^2 F \circ N + F \circ N) \operatorname{grad}_{\Sigma} u)(x) + \|(D^2 F_{N(x)} + F(N(x))) \cdot dN_x\|^2 u(x).$$

In terms of the stability operator we can write equation (3.1.6) as

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}(\psi_t) = - \int_{\Sigma} u L u d\Sigma.$$

If $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ is an isometric immersion with constant anisotropic mean curvature, we say that ψ is **stable** if the stability operator L is negative-definite.

3.2 The Wulff's construction

Let $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth positive function. For each $x \in \mathbb{S}^n$, consider $P(x)$ the hyperplane orthogonal to the position vector x that lies at $F(x)x$. Then $P(x)$ defines two closed half-spaces of $\mathbb{R}^{n+1}$, being one of them the half-space where x points outward, that we call $P_-(x)$.

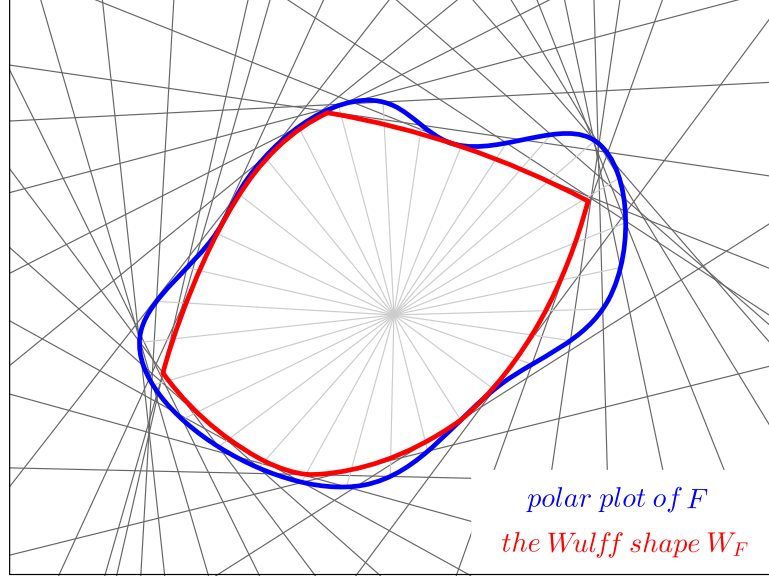


Figure 3.1: The Wulff's construction.

Definition 3.2.1. The **Wulff shape** of F is defined as the boundary of the intersection of all the half-spaces $P_-(x)$ when x varies in $\mathbb{S}^n$. We denote this set by W_F . Symbolically W_F is given by

$$W_F = \partial\{y \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle y, x \rangle \leq F(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^n\}. \quad (3.2.1)$$

Notice that when $F \equiv 1$, W_F becomes the n -dimensional sphere $\mathbb{S}^n$.

Remark 3.2.2. In this work we always impose that

$$(\text{Hess}_{\mathbb{S}^n} F)_y(\cdot, \cdot) + F(y)\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x \Sigma \times T_x \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.2)$$

is a positive symmetric bilinear form, for all $x \in \Sigma$. We call this assumption on F as the **convexity condition**. The reason of this name will become clear now.

Consider the application $G : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ given by:

$$G(y) = i_*(\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F)_y + F(y)y, \quad (3.2.3)$$

where $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ is the canonical inclusion. For all $X \in T_x \mathbb{S}^n$ we have that

$$\begin{aligned} dG_y(X) &= (D_{i_*X} \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F)_y + \langle (\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F)_y, X \rangle y + F(y)i_*X \\ &= i_*\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F - \langle \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F, X \rangle y + \langle (\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F)_y, X \rangle y + F(y)i_*X \\ &= i_*\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F + F(y)i_*X. \end{aligned}$$

From this equation we conclude that G is an immersion. Indeed, if $dG_y(X) = 0$ for some $X \neq 0$, then $\|\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F\| = F(y)\|X\|$, but since we are assuming the convexity condition on F , we have

$$\begin{aligned} 0 &= \langle dG_y(X), dG_y(X) \rangle = \|\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F\|^2 + 2F(y)\langle \nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F, X \rangle + F(y)^2\|X\|^2 \\ &= \|\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F\|^2 + 2F(y)(\text{Hess}_{\mathbb{S}^n} F)_y(X, X) + F(y)^2\|X\|^2 \\ &> \|\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F\|^2 - 2F(y)^2\|X\|^2 + F(y)^2\|X\|^2 \\ &= \|\nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F\|^2 - F(y)^2\|X\|^2, \end{aligned}$$

which is a contradiction. We have also that

$$\langle dG_y(X), y \rangle = \langle i_* \nabla_X \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F + F(y) i_* X, y \rangle = 0,$$

which means that the outward pointing Gauss map of $G(\mathbb{S}^n)$ is given by $N_W : x \mapsto G^{-1}(x)$. Thus we are able to compute the second fundamental form of G . We have:

$$\begin{aligned} \langle -d(N_W \circ G)_y(X), dG_y(Y) \rangle &= -\langle i_* X, dG_y(Y) \rangle \\ &= -\langle i_* X, i_* \nabla_Y \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F + F(y) i_* Y \rangle \\ &= -(\text{Hess}_{\mathbb{S}^n} F)_y(X, Y) - F(y) \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

The convexity condition implies that $G(\mathbb{S}^n)$ has strictly positive Gaussian curvature, and in particular, it encloses a strictly convex domain of $\mathbb{R}^{n+1}$.

Now, since $i_* \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F$ is orthogonal to y we have

$$\langle G(y), y \rangle = F(y), \quad (3.2.4)$$

whence we conclude that $G(y) \in P(y)$. From the fact that $N_W(G(y)) = y$ and $G(y) \in P(y) \cap (G(y) + T_{G(y)}G(\mathbb{S}^n))$, we conclude that $P(y) = G(y) + T_{G(y)}G(\mathbb{S}^n)$. In particular, by the convexity of $G(\mathbb{S}^n)$ we also conclude that $G(\mathbb{S}^n)$ is contained in $P_-(y)$. Therefore $G(\mathbb{S}^n)$ is the Wulff shape W_F .

Remark 3.2.3. It is useful to know that given a compact smooth hypersurface $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ which bounds a strictly convex domain, we can recover the function $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for which W is its Wulff Shape. For this purpose, equation (3.2.4) gives a hint: if N_W is the outward pointing Gauss map of W , then $N_W : W \rightarrow \mathbb{S}^n$ is a diffeomorphism and we recover F by just defining $F(x) = \langle (N_W)^{-1}x, x \rangle$.

An important feature of the Wulff shape is its minimizing property, which is the content of the next Theorem:

Theorem 3.2.4. (Wulff's Theorem, see Thm. 1.1 in [100]) Let $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth positive function and let W_F be its Wulff shape. Then $\mathcal{F}(W_F) \leq \mathcal{F}(\psi)$, among all hypersurfaces $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ enclosing the same volume as W_F . Moreover, the equality holds if and only if $\psi(\Sigma)$ a rescaling of W_F .

Remark 3.2.5. The Wulff's construction were indeed formulated for integrands $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ that are not necessarily smooth. The same conclusion of Theorem 3.2.4 is valid, where Riemannian manifolds give place to integral currents, a kind of more general spaces.

As a consequence Theorem 3.2.4 we conclude that W_F has constant anisotropic mean curvature and that it is stable. Actually, the Wulff shape plays the same role for the anisotropic area functional $\mathcal{F}$ as the unit sphere $\mathbb{S}^n$ for the area functional. In [56], for example, authors proved an anisotropic version of the famous Alexandrov Theorem (see [6]):

Theorem 3.2.6. (see [56]) Let $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be a compact hypersurface without boundary embedded in Euclidean space, and let $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a positive, smooth function that satisfies the convexity condition. If the anisotropic mean curvature of ψ with respect to F is constant, then up to translations and homotheties, $\psi(\Sigma)$ is the Wulff shape.

An anisotropic version of the Hopf Theorem was given independently by M. Koiso and B. Palmer in [65] and by N. Ando in [7]. Namely, the Wulff shape W_F is the only topological 2-sphere immersed in $\mathbb{R}^3$ with constant anisotropic mean curvature. And many other results concerning the Wulff shape can be found in the literature. For the interested reader we mention for example [52], [53], [54], [55], [56], [65], [82] and [84].

3.3 The anisotropic Gauss map

In this section we define the anisotropic version of the Weingarten operator, that represents the differential of the anisotropic Gauss map and whose trace is the anisotropic mean curvature. We compare the isotropic and anisotropic Weingarten operators and rewrite the stability operator in terms of the last one.

Let us fix a smooth positive function $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the convexity condition. Consider an oriented immersed hypersurface $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ with a fixed choice of Gauss map, that we denote by $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$. Since the Wulff shape W_F of F is a compact smooth hypersurface that bounds a convex region of $\mathbb{R}^{n+1}$, its pointing outward Gauss map $N_W : W_F \rightarrow \mathbb{S}^n$ is a diffeomorphism and the composition

$$\nu := (N_W)^{-1} \circ N : \Sigma \rightarrow W_F \quad (3.3.1)$$

is a well defined smooth application, that we call **anisotropic Gauss map** of ψ with respect to F . For each $p \in \Sigma$, the normal space of W_F at $\nu(p)$ is spanned by $N(p)$, since $N_W(\nu(p)) = N(p)$. Then the differential of ν at p , which is an application from $T_p \Sigma$ to $T_{\nu(p)} W_F$, can be regarded as an application from $T_p \Sigma$ to itself. If A and A_W are the Weingarten operators of $\psi(\Sigma)$ and W_F with respect to N and N_W , respectively, then

$$\langle -d\nu_p \cdot X, Y \rangle = \langle -d(N_W)_{N(p)}^{-1} dN_p \cdot X, Y \rangle = \langle -A_W^{-1} \circ A \cdot X, Y \rangle,$$

for any $X, Y \in T_p \Sigma$, that is, $-d\nu_p$ is represented by $A_F := -A_W^{-1} \circ A : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$, that we call the **anisotropic Weingarten operator** of ψ with respect to F (and N).

Proposition 3.3.1. The anisotropic mean curvature satisfies:

$$\Lambda(p) = \text{trace}_\Sigma(-d\nu_p) = \text{trace}_\Sigma(A_F).$$

Proof. First, we notice that

$$\begin{aligned} \text{div}_\Sigma(\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F \circ N)_p &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle \nabla_{X_i}(\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F \circ N), X_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle \tilde{\nabla}_{X_i}(\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F \circ N), i_* X_j \rangle. \end{aligned}$$

Thus, using the parametrization $G : \mathbb{S}^n \rightarrow W_F$ given in equation (3.2.3) and recalling that $(N_W)^{-1} = G$, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle -d\nu_p \cdot X_i, X_j \rangle &= \sum_{i,j=1}^n -g^{ij} \langle dG_{N(p)} dN_p \cdot X_i, X_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n -g^{ij} \langle i_* \nabla_{dN_p \cdot X_i} \text{grad}_{\mathbb{S}^n} F + F(N(p)) dN_p X_i, i_* X_j \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle \nabla_{dN_p \cdot X_i} (\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F)_{N(p)}, X_j \rangle \\ &\quad + F(N(p)) \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle -dN_p X_i, X_j \rangle \\ &= - \text{div}_\Sigma(\text{grad}_{\mathbb{S}^n} F \circ N)_p + nF(N(p))H(p) = \Lambda(p). \end{aligned}$$

□

It is interesting to notice that the Wulff shape has constant anisotropic mean curvature equals to -2 , with respect to the outward pointing unit normal N_W , since $\nu(p) = (N_W)^{-1} \circ N_W(p) = p$ and therefore $-d\nu_p = -Id$.

Another useful observation is the behaviour of the anisotropic mean curvature with respect to homotheties. When $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ is an isometric immersion with anisotropic mean curvature Λ with respect to choice of a Gauss map $N : \psi(\Sigma) \rightarrow \mathbb{S}^n$, then for any $c \neq 0$ the immersion $\tilde{\psi} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ given by $\tilde{\psi}(x) = c\psi(x)$ has anisotropic mean curvature $\tilde{\Lambda}(x) = \frac{1}{c}\Lambda(x)$, with respect to $\tilde{N} : \tilde{\psi}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{S}^n$ given by $\tilde{N}(\tilde{\psi}(x)) = N(\psi(x))$, for $x \in \Sigma$. Indeed, if $\{X_1, \dots, X_n\}$ is a basis of $T_p\Sigma$, then the coefficients of the first fundamental form of ψ and $\tilde{\psi}$ at p are respectively given by $g_{ij} = \langle d\psi_p(X_i), d\psi_p(X_j) \rangle$ and $\tilde{g}_{ij} = \langle d\tilde{\psi}_p(X_i), d\tilde{\psi}_p(X_j) \rangle = c^2 g_{ij}$. Since $\tilde{\nu}(\tilde{\psi}(p)) = N_W^{-1}(\tilde{N}(\tilde{\psi}(p))) = N_W^{-1}(N(\psi(p))) = \nu(\psi(p))$, we have

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(p) &:= \text{trace}(-d\tilde{\nu}_{\tilde{\psi}(p)}) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{g}^{ij} \langle -d\tilde{\nu}_{\tilde{\psi}(p)} d\tilde{\psi}_p X_i, d\tilde{\psi}_p X_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{g^{ij}}{c^2} \langle -d\nu_{\psi(p)} d\psi_p X_i, cd\psi_p X_j \rangle \\ &= \frac{1}{c} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \langle -d\nu_{\psi(p)} d\psi_p X_i, d\psi_p X_j \rangle \\ &= \frac{1}{c} \text{trace}(-d\nu_{\psi(p)}) = \frac{1}{c} \Lambda(p). \end{aligned}$$

In particular, the image of the Wulff shape by the antipodal map has constant anisotropic mean curvature equals 2 with respect to the inward point unit normal map.

There are some inequality relations involving the isotropic and the anisotropic Weingarten operators, as we can see in the next proposition.

Proposition 3.3.2. The following assertions are true:

- (a) $\|A_F\|^2 = \text{trace}_\Sigma(A_F^t A_F) = \frac{h_{11}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{12}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{21}^2}{\mu_2^2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2^2}$;
- (b) $4K_F \leq \Lambda^2 \leq \|A_F\|^2 + 2K_F$;
- (c) $\frac{1}{M^2} \|A\|^2 \leq \|A_F\|^2 \leq \frac{1}{m^2} \|A\|^2$;
- (d) $A_F^2 - \Lambda A_F + K_F Id = 0$;
- (e) $\text{trace}_\Sigma(A_F^2) = \Lambda^2 - 2K_F$;
- (f) $\text{trace}_\Sigma(AA_F) = \text{trace}_\Sigma(A_F A) = \frac{h_{11}^2}{\mu_1} + \frac{h_{12}^2}{\mu_1} + \frac{h_{21}^2}{\mu_2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2}$;
- (g) $H^2 \leq (h_{11}^2 + h_{22}^2) \leq 2M^2 \|A_F\|^2$,

where $m = \inf\{\min\{\mu_1(\nu(p)), \mu_2(\nu(p))\}; p \in \Sigma\}$ and $M = \sup\{\max\{\mu_1(\nu(p)), \mu_2(\nu(p))\}; p \in \Sigma\}$ and $K_F := \det(A_F)$.

Proof. Items (a), (e) and (f) are just computations. Item (c) is consequence of item (a). Item (d) is the Cayley-Hamilton Theorem. Thus we prove only items (b) and (g). We

have that

$$\begin{aligned}
\Lambda^2 &= \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} + \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 = \frac{h_{11}^2}{\mu_1^2} + 2 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2^2} \\
&= \frac{h_{11}^2}{\mu_1^2} - 2 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2^2} + 4 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} \\
&= \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} - \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 + 4 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} \\
&\geq 4 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} \geq 4 \left(\frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{\mu_1\mu_2} \right) = 4K_F.
\end{aligned}$$

On the other hand, using item (a) we get

$$\begin{aligned}
\|A_F\|^2 &= \frac{h_{11}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{12}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{12}^2}{\mu_2^2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2^2} \\
&= \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} + \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 - 2 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} + h_{12}^2 \left(\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} \right) \\
&= \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} + \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 - 2 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} + h_{12}^2 \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1^2\mu_2^2} \\
&\geq \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} + \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 - 2 \frac{h_{11}h_{22}}{\mu_1\mu_2} + 2h_{12}^2 \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1^2\mu_2^2} \\
&= \left(\frac{h_{11}}{\mu_1} + \frac{h_{22}}{\mu_2} \right)^2 - 2 \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{\mu_1\mu_2} = \Lambda^2 - 2K_F.
\end{aligned}$$

Putting them together, we obtain

$$4K_F \leq \Lambda^2 \leq \|A_F\|^2 + 2K_F.$$

This proves item (b). To proof (g), we notice that

$$\begin{aligned}
\|A_F\|^2 &= \frac{h_{11}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{12}^2}{\mu_2^2} + \frac{h_{12}^2}{\mu_1^2} + \frac{h_{22}^2}{\mu_2^2} \geq \frac{h_{11}^2}{M^2} + \frac{h_{12}^2}{M^2} + \frac{h_{12}^2}{M^2} + \frac{h_{22}^2}{M^2} \\
&\geq \frac{1}{M^2} (h_{11}^2 + h_{22}^2)
\end{aligned}$$

and

$$H^2 = (h_{11} + h_{22})^2 = h_{11}^2 + 2h_{11}h_{22} + h_{22}^2 \leq 2(h_{11}^2 + h_{22}^2)$$

putting them together, we obtain

$$H^2 \leq 2(h_{11}^2 + h_{22}^2) \leq 2M^2\|A_F\|^2.$$

□

Now, we write the anisotropic mean curvature in terms of the isotropic principal curvatures. It will be useful in the next chapter. For this purpose, let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a surface and let $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ be its Gauss map. Let us fix a point $p \in \Sigma$. Consider $\{E_1, E_2\}$ the principal directions of Σ at p , i.e.,

$$-dN_p E_i = \kappa_i(p) E_i, \quad i \in 1, 2,$$

where $\kappa_1(p)$ and $\kappa_2(p)$ are the principal curvatures of Σ at p . On the other hand, if $\{e_1, e_2\}$ are the principal directions of $W_F = G(\mathbb{S}^2)$ at $G(N(p))$, and $\mu_1(N(p))$, $\mu_2(N(p))$ are the principal curvatures related to e_1 and e_2 , respectively, we already know that

$$dG_{N(p)}e_i = \frac{1}{\mu_i(N(p))}e_i, \quad i \in 1, 2,$$

Since we can identify $T_p\Sigma$ with $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, we can write $\{E_1, E_2\}$ in terms of the basis $\{e_1, e_2\}$ as:

$$\begin{aligned} E_1 &= a_{11}(p)e_1 + a_{21}(p)e_2, \\ E_2 &= a_{12}(p)e_1 + a_{22}(p)e_2, \end{aligned}$$

with $a_{11}(p)^2 + a_{21}(p)^2 = a_{12}(p)^2 + a_{22}(p)^2 = 1$. In this way, if $\nu = G \circ N$ is the anisotropic Gauss map of Σ , we have:

$$\begin{aligned} -d\nu_p E_i &= -dG_{N(p)}dN_p E_i = \kappa_i(p)dG_{N(p)}E_i = \kappa_i(p) \sum_{j=1}^2 a_{ji}(p)dG_{N(p)}e_j \\ &= \sum_{j=1}^2 \kappa_i(p) \frac{a_{ji}(p)}{\mu_j(N(p))} e_j. \end{aligned}$$

Evaluating the anisotropic mean curvature we obtain

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{trace}_\Sigma(-d\nu_p) = \sum_{i=1}^2 \langle -d\nu_p E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle \sum_{j=1}^2 \kappa_i(p) \frac{a_{ji}(p)}{\mu_j(N(p))} e_j, \sum_{k=1}^2 a_{ki}(p) e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \kappa_i(p) \frac{a_{ji}(p)^2}{\mu_j(N(p))}. \end{aligned}$$

Defining $\gamma_1(p) = \frac{a_{11}(p)^2}{\mu_1(N(p))} + \frac{a_{21}(p)^2}{\mu_2(N(p))}$ and $\gamma_2(p) = \frac{a_{12}(p)^2}{\mu_1(N(p))} + \frac{a_{22}(p)^2}{\mu_2(N(p))}$, we can write:

$$\Lambda(p) = \gamma_1(p)\kappa_1(p) + \gamma_2(p)\kappa_2(p). \quad (3.3.2)$$

Thus, formula (3.3.2) relates the anisotropic mean curvature and the isotropic principal curvatures. We remark that if

$$m := \inf\{\mu_1(y), \mu_2(y); y \in W_F\} \quad \text{and} \quad M := \sup\{\mu_1(y), \mu_2(y); y \in W_F\},$$

then we have that $\frac{1}{M} \leq \gamma_1(p), \gamma_2(p) \leq \frac{1}{m}$, for all $p \in \Sigma$.

Before we end this section, we need to do some remarks about the Stability operator, that can be written in terms of the anisotropic Weingarten operator A_F and the Weingarten operator of the Wulff shape A_W . Indeed, let us consider the second order differential operator Δ_F in Σ given by

$$\Delta_F u := \text{div}_\Sigma(-A_W^{-1} \text{grad}_\Sigma u),$$

where A_W is evaluated at the point $\nu(x)$ and $u \in C^2(\Sigma)$. When $F \equiv 1$, we have $A_W = -Id$ and therefore Δ_F is the usual Laplacian operator.

As a consequence of this definition, we have:

$$\begin{aligned} Lu &:= \operatorname{div}_\Sigma(-A_W^{-1} \operatorname{grad}_\Sigma u) + \operatorname{trace}_\Sigma(-A_W^{-1} A^2)u \\ &= \operatorname{div}_\Sigma(-A_W^{-1} \operatorname{grad}_\Sigma u) + \operatorname{trace}_\Sigma(A_F A)u \\ &= \Delta_F u + \operatorname{trace}_\Sigma(A_F A)u \end{aligned}$$

that is,

$$Lu := \Delta_F u + \operatorname{trace}_\Sigma(A_F A)u$$

Remark 3.3.3. Consider a local frame $\{X_1, \dots, X_n\}$ on Σ . In this frame we can write:

$$\Delta_F u = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \{ -A_W^{-1} \nabla_{X_i} X_j(u) - X_i(-A_W^{-1} X_j(u)) \}.$$

Thus, we conclude that $\Delta_F u$ depends only on the first and second derivatives of u , but not on u . Moreover, it was proven in [71] that the operator Δ_F is elliptic in Σ . Using this information we conclude that the stability operator L is also elliptic, and since $\operatorname{trace}_\Sigma(A_F A)$ is a positive number, in view of the Maximum Principle (see Theorem A.1.3) if $Lu = 0$, then u does not have an interior non-positive local minimum, unless u is constant.

Proposition 3.3.4. (see [26]) If $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ is an isometric immersion with constant anisotropic mean curvature and $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ is its Gauss map then

$$\Delta_F N = - \operatorname{trace}_\Sigma(A_F A)N.$$

3.4 Some examples

This section is devoted to show some classes of examples of CAMC-surfaces that is already known. Examples are useful in many sense. They provide a way to test conjectures and help us to understand better the theory. They also permit us to compare similar results with different anisotropy functions or with different ambient spaces. In the following subsections we present rotation and helicoidal examples with constant anisotropic mean curvatures and the CAMC-cylinders, that play a vital role in the results of the next chapter.

3.4.1 CAMC revolution surfaces

In the study of constant mean curvature surfaces of $\mathbb{R}^3$, the most important examples are the Delaunay surfaces, i.e., the surfaces of revolution, found by C. Delaunay in [31]. Apart of the round spheres and round cylinders there are three more types of Delaunay surfaces: unduloids, nodoids and catenoids. An interesting property of a Delaunay surface Σ is that their profile curve can be generated by rolling a conic section C along a line without slipping and taking the trace of one of the loci of C (see Fig. 3.2). Namely, when C is a parabola, Σ is a catenoid; when C is an ellipse, Σ is an unduloid; and when C is a hyperbola, Σ is a nodoid.

Besides being nice examples, Delaunay surfaces appear in a fundamental way in the study of more general constant mean curvature surfaces. For example, in [67] it was shown that the ends of any properly immersed surface with nonzero constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$ are asymptotic to a Delaunay surface. Also, Delaunay surfaces are useful to compare with other constant mean curvature surfaces through the Maximum Principle.

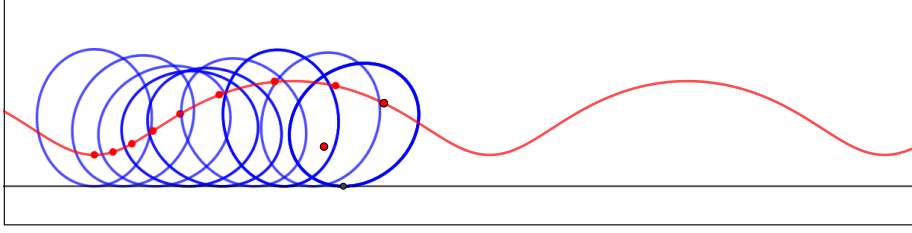


Figure 3.2: The unduloid (in red) as the geometric locus of a focus of a rolling ellipse (in blue).

Revolution surfaces with constant anisotropic mean curvature was first studied by Koiso and Palmer in [64]. We recall that in order to admit a rotationally symmetric surface we need to impose that the function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is rotationally invariant, that is, for some $v \in \mathbb{S}^2$ (the axis of rotation) and some function $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ we can write $F(w) = f(\langle v, w \rangle)$. This condition is equivalent to require that the Wulff shape be a rotation surface with axis parallel to v . The examples obtained in [64] are quite similar to those of the isotropic case. If the Wulff shape is a rotation surface whose axis is, for simplicity, parallel to $e_3 = (0, 0, 1)$ and whose profile curve is given by $s \mapsto (u(s), 0, v(s))$, where s is the arc length, then apart of the Wulff shape and the round cylinder with axis parallel to e_3 , a Delaunay surface parametrized by $\psi(s, t) = (\alpha(s) \cos t, \alpha(s) \sin t, \beta(s))$ satisfies

- I. $\alpha(u) = \frac{c}{2u}$ if it is the *anisotropic catenoid* (the anisotropic minimal surface), for some constant $c > 0$;
- II. $\alpha(u) = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda}$ if it is the *anisotropic unduloid*, for some constants $\Lambda < 0$ and $c > 0$, where $\alpha(u)$ is defined for $|u| \geq \sqrt{-\Lambda c}$;
- III. $\alpha(u) = \frac{u + \sqrt{u^2 + \Lambda c}}{-\Lambda}$ if it is the *anisotropic nodoid*, for some constants $\Lambda < 0$ and $c < 0$, where $\alpha(u(s))$ is defined for $-\infty < s < \infty$.

In both items, $\beta(u) = \int^u \alpha'(u)(v \circ u^{-1})'(u) du$. Moreover, it was shown that anisotropic unduloids are embedded periodic surfaces, while the anisotropic nodoids are only immersed and periodic, as occurs in the isotropic case.

Actually, the construction of anisotropic Delaunay surfaces is valid in the case where F is defined only in an open part of $\mathbb{S}^2$ and the convexity condition does not hold everywhere. But in our case where these two conditions hold, an additional information about catenoids is valid: the profile curve is a graph over the whole of the vertical axis.

In [66] authors showed that the profile of anisotropic Delaunay surfaces can be obtained as the trace of a point held in a fixed position relative to a curve that is rolled without slipping along a line, generalizing the same construction of Delaunay in [31]. In the same paper a more general construction of anisotropic Delaunay surfaces is given: instead of the Wulff shape is assumed to be a surface of revolution, they only assume that it has the property that all of its intersections with horizontal planes are mutually homothetic.

3.4.2 CAMC helicoidal surfaces

Another important class of surfaces are constituted by the helicoidal surfaces, that is, those surfaces which are invariant under a helicoidal motion. It is known that helicoidal surfaces with constant mean curvature arise as isometric deformations of Delaunay

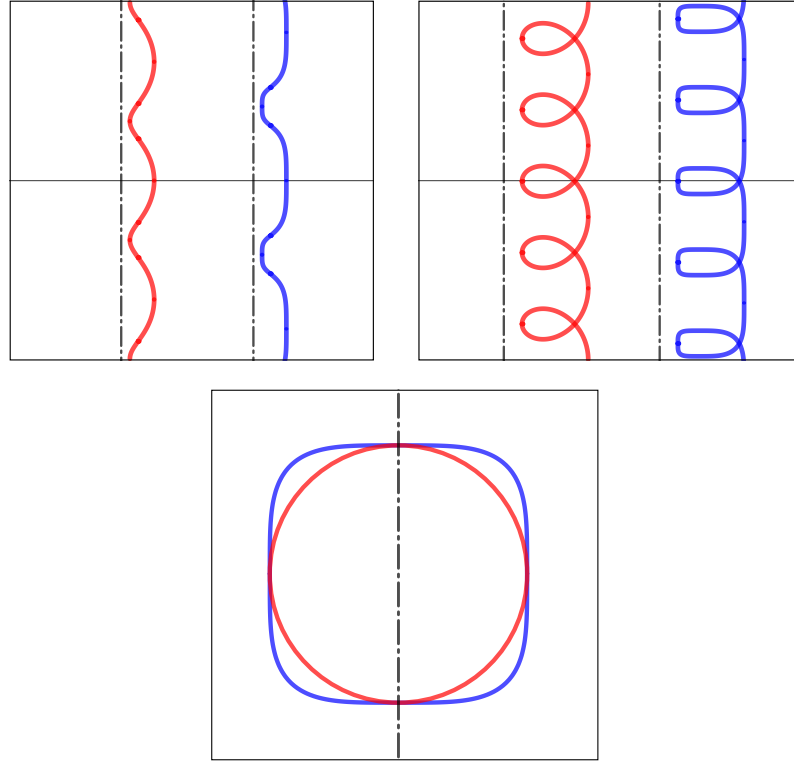


Figure 3.3: Comparison between profile curves of unduloids, nodoids and the Wulff shapes. The isotropic examples are coloured in red while their anisotropic counterpart are coloured in blue. The Wulff shape here is given by $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1\}$.

surfaces (see [17]). The best known example is the isometric deformation between the catenoid and the helicoid.

By the nature of helicoidal motions, we need to impose again that the Wulff shape is a rotation surface, and for simplicity, its axis is parallel to $e_3 = (0, 0, 1)$.

Any helicoidal surface can be parametrized by an application $\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ whose expression is:

$$\psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, g(r) + \lambda \theta), \quad (3.4.1)$$

where I is an interval of $\mathbb{R}$ and λ is a fixed real constant, the **pitch** of the surface. When g is constant, for example, we have the classical helicoids.

As observed in [68], the classical helicoid has zero anisotropic mean curvature for every rotationally symmetric anisotropic area functional. More generally, authors in [68] derived a expression for the first derivative of g to obtain a helicoidal surface with constant anisotropic curvature Λ through the representation in equation (3.4.1). Namely, $g(r)$ can be obtained by integrating the following equation:

$$[w(r)f(w(r)) - w(r)^2 f'(w(r))]r g'(r) = \frac{\Lambda r^2}{2} + C,$$

where $F(x, y, z) = f(z)$, $w(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r^2 g'(r)^2 + \lambda^2}}$ and C is a real constant. When $\lambda = 0$, we can recover the representation of anisotropic Delaunay surfaces that we showed in section 3.4.1.

Helicoidal surfaces can be written in another useful form, called twizzler representation: the parametrization $\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ given by

$$\psi(s, t) = (\alpha(s) \cos(\omega t) - \beta(s) \sin(\omega t), \beta(s) \cos(\omega t) + \alpha(s) \sin(\omega t), t + C), \quad (3.4.2)$$

where C and ω are real constants and $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), 0)$ is a curve parametrized by arc length called **generating curve** of ψ . Geometrically the surface is obtained as the orbit of the generating curve under the helical action

$$t \cdot (x, y, z) = ((x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t), x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t)), z + t).$$

We define the curve

$$\eta_1(s) := -(\alpha'(s)\alpha(s) + \beta'(s)\beta(s)) \quad \text{and} \quad \eta_2(s) := \alpha(s)\beta'(s) - \beta(s)\alpha'(s),$$

called **treadmill sled** of ψ . Geometrically this curve is obtained as the trace of the origin when the curve (α, β) rolls on a treadmill located at the origin which is aligned along the x -axis. For example, the treadmill sled of a circle with center at the origin is just a point, while the treadmill sled of a circle of radius R whose center is at a distance r of the origin, is a circle of radius r with center $(0, R)$.

As showed in Theorem IV.I of [68], a necessary and sufficient condition for a helicoidal surface represented in equation (3.4.2) have constant anisotropic mean curvature Λ is

$$\Lambda(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{2\eta_2}{w \left(\frac{\omega\eta_1}{\sqrt{1+\omega^2\eta_1^2}} \right) \sqrt{1+\omega^2\eta_1^2}} + A = 0,$$

where A is a real constant and $w(z) = \frac{1}{f(z)-zf'(z)}$. We can recover the curve $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$ through the expression (see Prop. IV.I in [68]):

$$(\alpha(s), \beta(s)) = (\eta_2(s) \sin(\omega_0) - \eta_1(s) \cos(\omega_0), -\eta_1(s) \sin(\omega_0) - \eta_2(s) \cos(\omega_0)),$$

where $\omega_0 = \int \frac{1}{\eta_1^2} d\eta_2$.

3.4.3 CAMC cylinders

One of the simplest kind of surfaces are cylinders. In the isotropic case, cylinders with constant mean curvature are included in the family of rotation examples. However we notice that cylinders of constant anisotropic mean curvature is known for any choice of anisotropy function. Indeed, in [46] authors classify the so called anisotropic isoparametric hypersurfaces of the Euclidean space, i.e., hypersurfaces whose anisotropic Weingarten operator is constant. Apart of hyperplanes and homotheties of the Wulff shape, the unique example of anisotropic isoparametric hypersurface in the Euclidean space are the CAMC-cylinders (“Wulff shape cylinder” in the nomenclature of [46]). In this thesis, cylinders with constant anisotropic mean curvature will play a vital role in Theorem 4.4.1. Thus, for completeness present the detailed construction of such cylinders in $\mathbb{R}^3$ in the following proposition.

Proposition 3.4.1. (see [46]) Let $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, be a smooth, positive function and let W_F be its Wulff shape. For each $v \in \mathbb{S}^2$, there exists a curve Γ such that the cylinder $\mathcal{C}_v$ parametrized by $\psi(s, t) = \Gamma(s) + tv$ (where s is a parameter for Γ) is a CAMC surface with $\Lambda = -2$. Moreover, up to translations, such a cylinder is unique and if $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \{v\}^\perp$ denotes the orthogonal projection onto the plane $\{v\}^\perp$ and $\Omega_v = \text{int}(\pi_v(W_F))$, then $\pi_v(\Gamma)$ lies inside Ω_v . In particular, up to translations $\mathcal{C}_v$ intersects W_F transversally.

Proof. Let us consider $G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ given by $G(x, y, z) = \text{grad}_{\mathbb{S}^2} F_{(x,y,z)} + F(x, y, z)(x, y, z)$, which is a parametrization of W_F . Given $v \in \mathbb{S}^2$, we consider the great circle $\tilde{\Gamma} = \mathbb{S}^2 \cap \{v\}^\perp$

and we define $\Gamma := G(\tilde{\Gamma})$. Then we define $\psi(s, t) = \Gamma(s) + tv$, whose image is a cylinder that we call $\mathcal{C}_v$.

Let s be an arc length parameter to $\tilde{\Gamma}$, which also works as a parameter for Γ (since G is a diffeomorphism) and denote by N_W and A_W the Gauss map and its Weingarten operator with respect to W_F , respectively. Notice that A_W is negative-definite, since W_F is convex and N_W points outward W_F . Also, we recall that $N_W = G^{-1}$. We claim that $\mathcal{C}_v$ is well defined, that is, $\{\Gamma'(s), v\}$ is linearly independent for all s . Indeed, if $\Gamma'(s_0)$ were parallel to v for some s_0 , we would have

$$\begin{aligned} \langle N_W(\Gamma(s_0)), v \rangle &= \langle \tilde{\Gamma}(s_0), v \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle dN_W(\Gamma'(s_0)), v \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle dN_W(\Gamma'(s_0)), \Gamma'(s_0) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

But $\langle dN_W(\Gamma'(s_0)), \Gamma'(s_0) \rangle = -\langle A_W \Gamma'(s_0), \Gamma'(s_0) \rangle > 0$. We have a contradiction.

Now, notice that the outward pointing unit of $\mathcal{C}_v$ at $\psi(s, t)$ coincide with $\tilde{\Gamma}(s)$, the outward unit normal of $\tilde{\Gamma}$ in $\{v\}^\perp$. Indeed, we have that

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}(s), \Gamma'(s) \rangle &= \frac{d}{ds} \langle \tilde{\Gamma}(s), \Gamma(s) \rangle - \langle \tilde{\Gamma}'(s), \Gamma(s) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \tilde{\Gamma}(s), (\text{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{\tilde{\Gamma}(s)} + F(\tilde{\Gamma}(s)) \tilde{\Gamma}(s) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \tilde{\Gamma}'(s), (\text{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{\tilde{\Gamma}(s)} + F(\tilde{\Gamma}(s)) \tilde{\Gamma}(s) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} F(\tilde{\Gamma}(s)) - \langle \tilde{\Gamma}'(s), (\text{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_{\tilde{\Gamma}(s)} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Thus, the anisotropic Gauss map of $\mathcal{C}_v$ evaluated at $\psi(s, t)$ is given by $\nu(s, t) = G(\tilde{n}(s))$, whence we conclude that

$$\begin{aligned} \partial_s \psi(s, t) &= \Gamma'(s) \\ \partial_t \psi(s, t) &= v \\ \partial_s \nu(s, t) &= (G \circ \tilde{n})'(s) = \Gamma'(s) = \partial_s \psi(s, t) \\ \partial_t \nu(s, t) &= 0. \end{aligned}$$

Therefore $\partial_s \psi(s, t)$ and $\partial_t \psi(s, t)$ are anisotropic principal directions with anisotropic principal curvatures -1 and 0 , respectively, whence we conclude that $\Lambda = \text{trace } -d\nu_{(s,t)} = -1$. Also by the fact that the outward unit normal at $\psi(s, t)$ is $\tilde{\Gamma}(s)$, we conclude that $\pi_v(\Gamma)$ coincides with $\partial\Omega_v$. In particular $\pi_v(\Gamma)$ is a planar convex curve.

Finally, we replace Γ by its image under the half scale homothety about the origin. The resulting cylinder has constant anisotropic mean curvature -2 with respect to its outward pointing Gauss map and up to translations, it intersects the Wulff shape transversally. $\square$

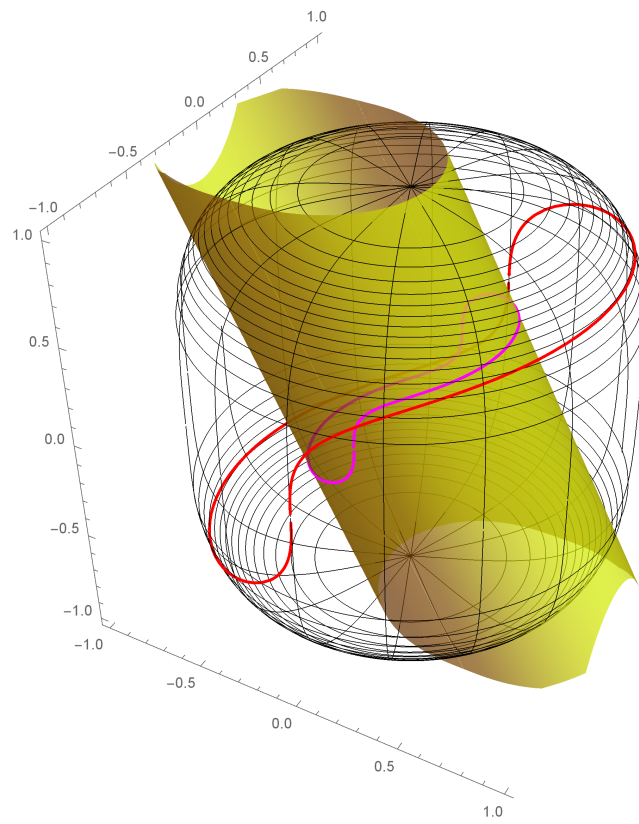


Figure 3.4: Example of a CAMC anisotropic cylinder for $W_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)^2 + y^4 = 1\}$.

Chapter 4

Main results

In this chapter, we present the main results of this thesis. The first main result is a Bernstein-type theorem for CAMC multigraphs, which states that the only CAMC complete multigraphs are the planes. For its proof, we use some ideas found in [51]. Although this theorem is important by itself, it also has nice applications: for example, one interesting consequence is our second main result, which states that complete CAMC surfaces whose Gaussian curvature does not change sign are either CAMC cylinders or homotheties of the Wulff shape, generalizing the isotropic version proved by T. Klotz and R. Osserman in [63].

Another consequence of the Bernstein-type Theorem for CAMC multigraphs is the third main result of this chapter: uniform height estimates for CAMC graphs over closed domains with boundary contained in a plane. These estimates depend only on the anisotropic mean curvature. As a corollary, we also obtain height estimates for compact CAMC surfaces with planar boundary, with the additional hypothesis that the Wulff shape is symmetric with respect to the plane which contains the boundary of the surface. Using these estimates, we are able to prove, under certain hypothesis, that any properly embedded CAMC surface with finite topology and at most one end is in fact the Wulff shape, up to a homothety.

Our main difficulty in generalize such theorems for CAMC surfaces relies on the fact that the anisotropic mean curvature is not necessarily invariant under reflections of the ambient space, since F can assume different values in a point and its reflected image. Because of this difficulty, part of this chapter is devoted to prove some auxiliary results: a Compactness Theorem is useful to obtain complete Λ -CAMC surfaces as a limit of compact pieces of a sequence of surfaces whose anisotropic mean curvature converges to Λ ; another useful result are uniform estimates for the diameter of horizontal slices of Λ -CAMC graphs over closed domains, whose boundary is contained in a plane; we also obtained a priori second fundamental form estimates for surfaces with bounded anisotropic mean curvature and whose Gauss maps omit a disk. With these three Theorems we are able to prove the Height Estimates for CAMC graphs.

In this chapter, all surfaces will have anisotropic mean curvature computed with respect to a positive, smooth function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfies the convexity condition 3.2.2.

4.1 Compactness theorem

We begin recalling a well-known result in surface theory that can be found in [88].

Theorem 4.1.1. (see [88], Prop. 2.3) Let Σ be an immersed surface in $\mathbb{R}^3$ whose second fundamental form A satisfies $|A| < \frac{1}{4\delta}$ for some constant $\delta > 0$. Then for any $x \in \Sigma$ with $d_\Sigma(x, \partial\Sigma) > 4\delta$ there is a neighborhood of x in Σ which is a graph of a function u over the Euclidean disk of radius $\sqrt{2}\delta$ centered at x in the tangent plane of Σ at x . Moreover, u satisfies

$$|u| < 2\delta, \quad |\text{grad}_{\mathbb{R}^2} u| < 1 \quad \text{and} \quad |\text{Hess}_{\mathbb{R}^2} u| < \frac{1}{\delta}.$$

Our first auxiliary result is the following Compactness Theorem:

Theorem 4.1.2. Let $\{\Sigma_n\}_n$ be a sequence of CAMC surfaces (possibly with boundary) in $\mathbb{R}^3$. For each $n \in \mathbb{N}$, take $p_n \in \Sigma_n$ and assume that the following conditions hold:

- (i) There exists a sequence of positive numbers $\{r_n\}_n$ with $r_n \rightarrow \infty$ such that the geodesic disks $D_{\Sigma_n}(p_n, r_n)$ centered at p_n of radius r_n are well defined and contained in the interior of Σ_n , i.e., $d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n) \geq r_n$;
- (ii) $p_n \rightarrow p$ for a certain $p \in \mathbb{R}^3$;
- (iii) If $|\sigma_n|$ denotes the length of the anisotropic second fundamental form of Σ_n , then there exists $C > 0$ such that $|\sigma_n(x)| \leq C$ for every $n \in \mathbb{N}$ and every $x \in \Sigma_n$;
- (iv) $\Lambda_n \rightarrow \Lambda \in \mathbb{R}$, where Λ_n denotes the (constant) anisotropic mean curvature of Σ_n .

Then for any $k \geq 2$ there exists a subsequence of $\{\Sigma_n\}_n$ that converges uniformly on compact sets in the C^k -topology to a complete (possibly non-connected) immersed surface Σ without boundary, that passes through p , with bounded curvature and constant anisotropic mean curvature Λ .

Remark 4.1.3. As a consequence of item (c) in Proposition 3.3.2, the condition (iii) in Theorem 4.1.2 can be replaced by the existence of a constant $C' > 0$ such that the norm of the isotropic second fundamental form A_n of Σ_n satisfies $\|A_n\| \leq C'$, for every $n \in \mathbb{N}$ and every $x \in \Sigma_n$.

Proof of Theorem 4.1.2. The proof is based on the ideas found in [15].

1st Part: In view of items (i) and (iii), the conditions of Theorem 4.1.1 is verified. Thus there exist constants $\delta, M > 0$ that only depend on C (and not on Λ_n or Σ_n) such that for n sufficiently large:

- a. an open neighborhood of $p_n \in \Sigma$ is the graph of a function u_n defined over the Euclidean disk D_δ centered at the origin with radius δ in $T_{p_n}\Sigma_n$.
- b. the C^2 -norm of u_n in D_δ is not greater than M .

Since each Σ_n has anisotropic mean curvature Λ_n , choosing adequate coordinates (x_n, y_n, z_n) in $\mathbb{R}^3$ so that $T_{p_n}\Sigma_n$ coincides with the plane $\{z_n = 0\}$, each function u_n is a solution in D_δ of the anisotropic mean curvature equation:

$$\Lambda_n = A_0(p, q)\tilde{F}(N_n) + \sum_{i=1}^4 A_i(p, q)\tilde{F}_{x_i}(N_n) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} A_{i,j}(p, q)\tilde{F}_{x_i x_j}(N_n) \quad (4.1.1)$$

where A_0 , A_i and $A_{i,j}$ are as in equation (A.3.1). We notice that such equations are quasilinear elliptic PDE's whose coefficients of second order depends smoothly on the derivatives of u_n .

We now use a trick that allow us to use the Schauder estimates for linear second-order PDE's in order to obtain a uniform boundedness of $\{u_n\}_n$ in the $C^{2,\alpha}$ -norms over compact domains. For each $n \in \mathbb{N}$, consider the following linear second-order PDE:

$$L_n[u] := \tilde{a}_n(x_n, y_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \tilde{b}_n(x_n, y_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial y_n} + \tilde{c}_n(x_n, y_n) \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} = \Lambda_n, \quad (4.1.2)$$

where the coefficients $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ and $\tilde{c}_n$ are the same as the second order coefficients of 4.1.1, but evaluated on the solution $u_n(x_n, y_n)$ of 4.1.1 and its first-order derivatives. By construction, $L_n[u_n] = \Lambda_n$ and $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ and $\tilde{c}_n$ depends smoothly on the derivatives of u_n .

Notice that condition (b) above automatically implies that $\{u_n\}_n$ is uniformly bounded in the $C^{1,\alpha}(D_\delta)$ -norm, for all $0 < \alpha < 1$. Thus, the coefficients of the equations (4.1.2) are all uniformly bounded in the $C^{0,\alpha}(D_\delta)$ -norm. Then, using the Schauder estimates (see [47], Corollary 6.3, or Theorem A.4.3), for any $0 < \delta' < \delta$ we conclude that there exists a constant C' (again independent of n) such that $\|u_n\| \leq C'$ in the $C^{2,\alpha}(D_{\delta'})$ -norm. In particular, all coefficients of $L[u_n] = \Lambda_n$ are uniformly bounded in the $C^{1,\alpha}(D_{\delta'})$ -norm. Using a bootstrap argument, we eventually obtain

$$\|u_n\|_{C^{k,\alpha}(D_{\delta'})} \leq C'', \quad 0 < \alpha < 1,$$

for some constant C'' independent of n .

Thus we may apply the Arzela-Ascoli Theorem. There is a subsequence $\{u_n\}_{n \in N_1}$ of $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ that converges on $D_{\delta'}$ in the C^k -topology to a function $u \in C^k(D_{\delta'})$, which by item (iv) is a solution of

$$\Lambda = A_0(p, q) \tilde{F}(N) + \sum_{i=1}^4 A_i(p, q) \tilde{F}_{x_i}(N) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} A_{ij}(p, q) \tilde{F}_{x_i x_j}(N),$$

that is, the graph Σ of u is a Λ -CAMC surface in $\mathbb{R}^3$ with Gauss map N , that passes through p and has second fundamental form bounded by C , by items (ii) and (iii).

2nd Part: Consider some $y \in D_{\delta'}$, and let $q \in \Sigma$ be the corresponding point in the graph of u . For each $n \in N_1$ there exist points $q_n \in \mathbb{R}^3$ in the graphs of u_n , all corresponding to y . It is clear that $\{q_n\}_{n \in N_1}$ converges to q . This means that $\{q_n\}_{n \in N_1}$ and q can play the same role as $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and p did in the first part of the proof. Thus, passing to a subsequence if necessary so that condition (i) in the statement is fulfilled, we can repeat the same process above to obtain a Λ -CAMC surface in $\mathbb{R}^3$ that extends Σ and is well defined around q as a vertical graph over the disk of radius δ' centered at the origin of $T_q \Sigma$.

Applying the argument of the last paragraph with a suitable choice of the points $y \in D_{\delta'}$, it is possible, after a finite number of steps, to extend Σ in a geodesic disk centered at p with radius $\delta_1 := (2 - \frac{1}{2})\delta'$. More generally, replacing $D_{\delta'}$ by D_{δ_1} we can extend Σ in a geodesic disk of radius $\delta_2 = (3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})\delta'$, and proceeding inductively, for any radius $\delta_l = (l + 1 - \sum_{j=1}^l \frac{1}{2^j})\delta'$, with $l \in \mathbb{N}$. By a standard diagonal process Σ can be extended to a complete Λ -CAMC surface (which will also be denoted by Σ), that passes through p , and whose second fundamental form is bounded by C . Moreover, Σ is by construction a limit in the C^k topology on compact sets of the diagonal subsequence of $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mentioned above. Finally, it is important to observe that other connected components could also appear in this process. This completes the proof. $\square$

4.2 Second fundamental form and horizontal diameter estimates

The next lemma is based in an analogous result by W. Meeks, in [78]. It gives estimates for the connected components of horizontal slices of a CAMC graph with planar boundary, and it will be useful later. Put in other words, the geometrical meaning of this lemma is that, from a certain height of the planar boundary, the connected components of the graph are contained in a cylinder of uniform radius.

Lemma 4.2.1. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a graph $z = u(x, y)$ over a closed (not necessarily bounded) domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, with zero boundary values. Assume that Σ has constant anisotropic mean curvature $\Lambda \neq 0$. Let d be the diameter of W_F (the supremum of the Euclidean distance between two of its points) and put $R = d\sqrt{3}/|\Lambda|$. Then, for every $t > 2R$, the diameter of each connected component of $\Sigma \cap \{|z| = t\}$ is at most $2R$. In particular, all connected components of $\Sigma \cap \{|z| \geq t\}$ for $t > 2R$ are compact.

Proof. The proof is based on the ideas of Theorem 4 in [5] (see also Theorem 6.2 in [43]), which in turn is a simplification of the original proof due by W. Meeks in [78], Lemma 2.4. Here, for simplicity, we assume $\Lambda = 2$. The general case follows by taking a homothety. Let $P(t)$ be the foliation of $\mathbb{R}^3$ by horizontal planes, being $P(t)$ the plane at height t . Consider W the image of the Wulff shape W_F by the antipodal map. In other words, W has anisotropic mean curvature equals to 2 with respect to the inward pointing unit normal vector. It is possible to show that W is contained in some sphere of radius R . To fix ideas, let $\tilde{o}$ denote the center of such a sphere.

Since Σ is a graph, its Gauss map N for which the anisotropic mean curvature is evaluated satisfies either $\langle N, e_3 \rangle < 0$ or $\langle N, e_3 \rangle > 0$ on Σ . Without loss of generality, let us suppose that the first case occurs. Then, by the maximum principle we can also suppose that $\Sigma \subset \{z \geq 0\}$, that is, u is non-negative. Indeed, if there exists an interior point $q \in \Omega$ where $u(q) < 0$, considering $\hat{o} \in W$ as the highest point of W relative to e_3 , since $\overline{B_{\mathbb{R}^2}(q, R)} \cap \overline{\Omega}$ is compact, for very negative values of s , the image $W(s)$ of W by the translation that takes $\hat{o}$ to $q + se_3$ does not intersect Σ . Thus, increasing s we eventually obtain an interior contact point between $W(s)$ and Σ . In this scenario, the normals of $W(s)$ and Σ coincide at the contact point, and locally, $W(s)$ lies above Σ . This contradicts the Maximum Principle.

Let us suppose that the theorem is not true. Then for some $t > 2R$ there exists at least one such connected component $C(t)$ of $\Sigma(t) := P(t) \cap \Sigma$ whose diameter is greater than $2R$. Without loss of generality we can also assume that $P(t)$ intersects Σ transversally. Thus, the connected components of $\Sigma(t)$ are disjoint regular simple curves which do not touch $\partial\Omega \times \{t\}$. Moreover, by the Jordan-Brouwer Theorem, these curves are the boundary of connected regions in $P(t)$ whose points lie below the graph of u (see Fig. 4.1).

Denote by $\Omega(t) \subset P(t)$ the region of $P(t)$ bounded by $C(t)$. We can find two points $p, q \in \Omega(t)$ such that $d_{\mathbb{R}^3}(p, q) > 2R$. Let $\beta : [a, b] \rightarrow \Omega(t)$ be a simple curve contained in $\Omega(t)$ joining p to q and such that the Euclidean distance from p to q is maximal, among the points of β . Let $\mathcal{R}$ the “rectangle” given by

$$\mathcal{R} = \{\alpha_s(r); s \in [a, b], r \in [0, t]\}$$

where α_s is the geodesic with initial data $\alpha_s(0) = \beta(s)$ and $(\alpha_s)'(r) = -e_3$, being r an arc length parameter for α_s .

Since Σ is a graph and β lies in $\Omega(t)$, we conclude that $\mathcal{R} \subset Q$, where Q is the connected region of $\mathbb{R}^3$ between Σ and the plane $P(0) = \{z = 0\}$. Moreover, if $\hat{\eta}$ is a

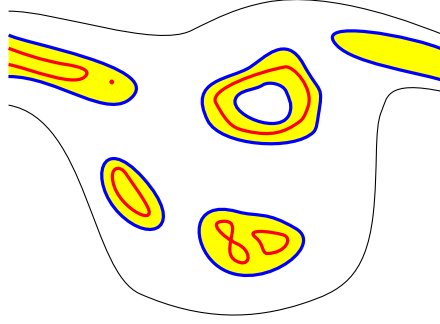


Figure 4.1: In yellow, $u^{-1}([t, +\infty))$; in blue, $u^{-1}(\{t\})$; and in red, $u^{-1}(\{s\})$, for $s > t$.

horizontal unit vector orthogonal to $p - q$, by construction of β , $\mathcal{R}$ divides the solid region

$$S = \{x + l\hat{\eta}; x \in \mathcal{R}, l \in \mathbb{R}\}$$

in two connected components, C_1 and C_2 , with $\partial C_1 \cap \partial C_2 = \mathcal{R}$.

Let $\tilde{p} \in \mathcal{R}$ be a point whose distance to $\partial \mathcal{R}$ is greater than R . Such a point exists, since the distance between $P(0)$ and $P(t)$ and the distance between α_a and α_b are both greater than $2R$. Define η as the horizontal line passing through $\tilde{p}$, parallel to $\hat{\eta}$. Notice that the distance of any point in η to ∂S is greater than R .

Let r be a parameter for η and consider, for each $r \in \mathbb{R}$, the translation of the Wulff shape from $\tilde{o}$ to $\eta(r)$, which we will denote by $W(r)$. Note that $W(r)$ is contained in the interior of S , for any $r \in \mathbb{R}$. Also, for r sufficiently large, $W(r)$ is completely contained in C_1 , since $\mathcal{R}$ is compact. We then decrease r and consider only the piece $\tilde{W}(r) := W(r) \cap C_2$ which has gone through $\mathcal{R}$. As we decrease r more and more, we obtain one of the following two cases: either $\tilde{W}(r)$ could go through $\mathcal{R}$ completely, and end up being entirely contained in Q (Fig. 4.2 (a)(b)(c)) or we obtain a first contact point between $\tilde{W}(r)$ and ∂Q (Fig. 4.2 (d)(e)). In the first case we can move $\tilde{W}(r)$ upwards until it reaches a first contact point with Σ . However, in both cases the contact point between $\tilde{W}(r)$ and Σ occurs in the inner side of Σ , since $\tilde{W}(r) \subset Q$. Moreover, the normal vectors of $\tilde{W}(r)$ and Σ coincide at the contact point and $W(r)$ is locally above Σ , whence we conclude that both surfaces agree, by the Maximum Principle. This finishes the proof.

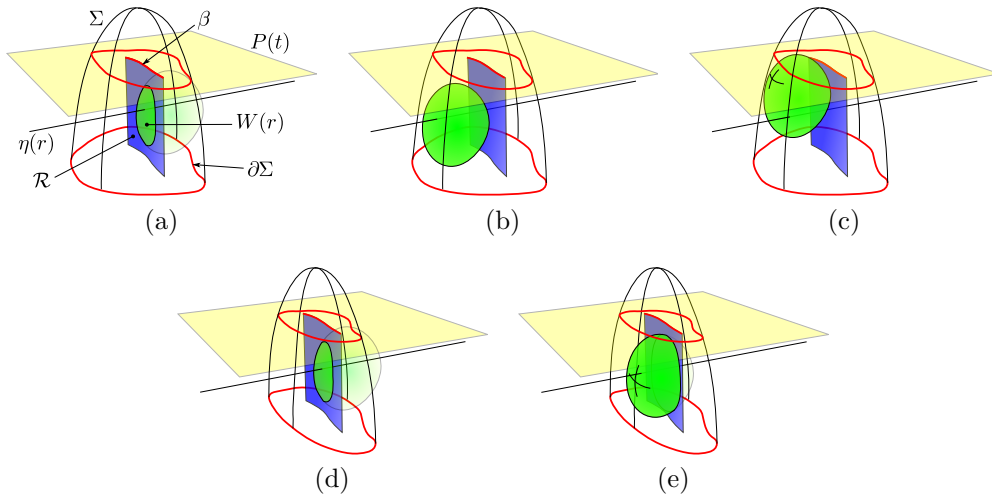


Figure 4.2: Two possible scenarios to obtain an inner contact point.

□

We recall a very important theorem due by Jenkins: a Bernstein's Theorem for anisotropic minimal surfaces.

Theorem 4.2.2. (see [62], Cor. pg. 198) Let Σ be an anisotropic minimal surface. Assume that Σ is oriented and complete. If its Gauss map omits a disk of $\mathbb{S}^2$, then Σ is a plane.

Now we are in conditions to present a Second Fundamental Form Estimates in terms of the anisotropic mean curvature and the Gauss map.

Theorem 4.2.3. Let M, d, ρ be positive constants. Then there exists $C = C(M, d, \rho) > 0$ such that the following assertion is true:

Let Σ be any complete, immersed oriented surface in $\mathbb{R}^3$ with constant anisotropic mean curvature Λ , possibly with non-empty boundary. Denote by N and σ its Gauss map and its second fundamental form, respectively. Assume that

- (i) $|\Lambda| \leq M$;
- (ii) $N(\Sigma)$ omits a spherical disk of radius ρ .

Then for any $p \in \Sigma_d := \{x \in \Sigma; d_\Sigma(x, \partial\Sigma) \geq d\}$, we have

$$|\sigma|(p) \leq C.$$

Here d_Σ and $|\sigma|$ denotes the intrinsic distance on Σ and the norm of the anisotropic second fundamental form of Σ , respectively.

Proof. The idea of this proof is based on some of the arguments of Theorem 4.2, in [15]. Arguing by contradiction we are able to exhibit an anisotropic minimal graph that is complete, whose second fundamental form is not identically zero. It contradicts Theorem 4.2.2.

Suppose that for each $n \in \mathbb{N}$ there is an isometric immersion $f_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ with constant anisotropic mean curvature Λ_n and Gauss map $N_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{S}^2$ verifying

- (a) $|\Lambda_n| \leq M$;
- (b) $N_n(\Sigma_n)$ omits a spherical disk of radius ρ ;

and a point $p_n \in \Sigma_n$ such that $d_{\Sigma_n}(p_n, \partial\Sigma_n) \geq d$ but $|\sigma_n(p_n)| > n$. Here d_{Σ_n} and σ_n denote the intrinsic distance on Σ_n and the second fundamental form of f_n , respectively. Passing to a subsequence, if necessary, we can suppose that for all $n \in \mathbb{N}$, $N_n(\Sigma_n)$ omits the same open spherical disk of radius $\rho/2$. For convenience, we can change the Euclidean coordinates and assume that such disk is centered in the north pole of $\mathbb{S}^2$.

Consider the compact intrinsic metric disk $D_n = D_{\Sigma_n}(p_n, d/2)$ in Σ_n , whose distance from $\partial\Sigma_n$ is at least $d/2$. Let q_n be the maximum on D_n of the function

$$h_n(x) = |\sigma_n(x)|d_{\Sigma_n}(x, \partial D_n), \quad x \in D_n.$$

Clearly q_n lies in the interior of D_n , as h_n vanishes in ∂D_n . Putting $\lambda_n = |\sigma_n(q_n)|$ and $r_n = d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)$, by hypothesis we have

$$\begin{aligned} \lambda_n r_n &= |\sigma_n(q_n)|d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n) = h(q_n) \geq h(p_n) \\ &= |\sigma_n(p_n)|d_{\Sigma_n}(p_n, \partial D_n) = \frac{d}{2}|\sigma_n(p_n)| > \frac{dn}{2}. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Since $r_n = d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n) \leq \frac{d}{2}$, we conclude that $\lambda_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Also, notice that for every $z_n \in B_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ we have (see Fig. 4.3)

$$d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n) > \frac{r_n}{2} = \frac{1}{2}d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n) \quad (4.2.2)$$

Consider now the immersed oriented surfaces $g_n : D_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtained by

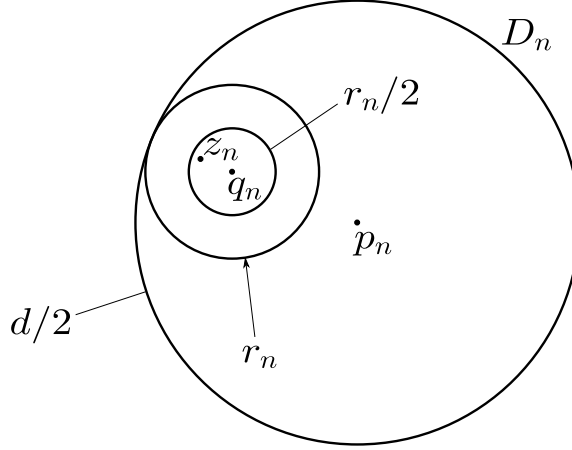


Figure 4.3: Auxiliary illustration exhibiting constructions done in the proof.

applying a rescaling of factor λ_n to the restriction of f_n to $D_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$, that is, $g_n = \lambda_n f_n$ restricted to $D_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$. For short, we will sometimes write M_n to denote this immersed surface given by g_n . If we denote the second fundamental form of g_n by $\hat{\sigma}_n$, using equation (4.2.2), for any point $z_n \in D_{\Sigma_n}(q_n, r_n/2)$ we obtain

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_n(z_n)| &= \frac{|\sigma_n(z_n)|}{\lambda_n} = \frac{h_n(z_n)}{\lambda_n d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq \frac{h_n(q_n)}{\lambda_n d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \\ &= \frac{d_{\Sigma_n}(q_n, \partial D_n)}{d_{\Sigma_n}(z_n, \partial D_n)} \leq 2. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

In particular the sequence $\{M_n\}_n$ has uniformly bounded second fundamental form. Also, notice that $|\hat{\sigma}(q_n)| = 1$, by construction. We recall that the **radius** of a compact Riemannian surface with boundary is the maximum distance of points in the surface to its boundary. In our case, the radius of M_n is at least $\lambda_n r_n/2$ (if we compare the graph M_n to its domain, in the Euclidean metric), which by equation (4.2.1) diverges to infinity as $n \rightarrow \infty$.

Let now $\tilde{M}_n$ denote the translation of M_n that takes the point $g_n(q_n)$ to the origin of $\mathbb{R}^3$, and let $\xi_n \in \mathbb{S}^2$ denote the Gauss map image of M_n at q_n . After passing to a subsequence, we may assume that $\xi_n \rightarrow \xi$ as $n \rightarrow \infty$, for some $\xi \in \mathbb{S}^2$. Thus $\{\tilde{M}_n\}_n$ is a sequence of surfaces with the norm of the second fundamental forms uniformly bounded by 2, and equal to 1 at the origin.

Using Theorem 4.1.1, we conclude that there exist positive constants δ_0, μ (independent of n) such that for n large we can view a neighborhood of the origin in $\tilde{M}_n$ as a graph of a function u_n over the disk D_n^0 of radius δ_0 of its tangent plane $T_0 \tilde{M}_n = \{\xi_n\}^\perp$, and such that $\|u_n\|_{C^2(D_n^0)} \leq \mu$. Since $\xi_n \rightarrow \xi$ in $\mathbb{S}^2$, after making δ_0 smaller and μ larger, if necessary, and for n large enough, we have that the same properties hold with respect to the ξ -direction, that is:

- (c) an open neighborhood of the origin in $\tilde{M}_n$ is the graph $x_3 = u_n(x_1, x_2)$ of a function u_n over the Euclidean disk $\mathcal{D}_0 = D(0, \delta_0)$ of radius δ_0 in $\{\xi\}^\perp$; here (x_1, x_2, x_3) are orthonormal Euclidean coordinates centered at the origin, with $\frac{\partial}{\partial x_3} = \xi$.

(d) the C^2 -norm of u_n in $\mathcal{D}_0$ is at most μ

Let $\tilde{\Lambda}_n$ denote the constant anisotropic mean curvature of $\tilde{M}_n$. By item (a) and the fact that the factors λ_n diverge to $+\infty$ we conclude that $\{\tilde{\Lambda}_n\}_n$ converges to zero. Also notice that, since the graph of u_n has constant anisotropic mean curvature $\tilde{\Lambda}_n$, then u_n is a solution to the linear elliptic PDE for u :

$$\tilde{\Lambda}_n = A_0(p, q)\tilde{F}(N) + \sum_{i=1}^4 A_i(p, q)\tilde{F}_{x_i}(N) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} A_{ij}(p, q)\tilde{F}_{x_i x_j}(N), \quad (4.2.4)$$

where the coefficients A_0 , A_i and A_{ij} are as in equation (A.3.1), with $p = u_{x_1}$, $q = u_{x_2}$, $r = u_{x_1 x_1}$, $s = u_{x_1 x_2}$, $t = u_{x_2 x_2}$ being the derivatives of u with respect to the variables (x_1, x_2) and $N = \frac{(-u_{x_1}, -u_{x_2}, 1)}{\sqrt{1+u_{x_1}^2+u_{x_2}^2}}$. As, by condition (d) above, the functions u_n are uniformly bounded in the $C^{1,\alpha}$ -norm in $\mathcal{D}_0$, we conclude that all coefficients of (4.2.4) are bounded in the $C^{0,\alpha}(\mathcal{D}_0)$ -norm. By the Schauder Estimates, for any $0 < \delta < \delta_0$ the $C^{2,\alpha}$ -norm of the functions u_n on $D(0, \delta)$ are uniformly bounded.

Once here, we may repeat the last part of the proof in Theorem 4.1.2 using the Arzela-Ascoli Theorem and a diagonal argument, and conclude that a subsequence of the surfaces $\tilde{M}_n$ converges uniformly on compact sets in the C^2 -topology to a complete anisotropic minimal surface M^∞ (since by construction $\{\tilde{\Lambda}_n\}_n$ converges to zero) of bounded curvature that passes through the origin. Moreover, the norm of the second fundamental form of M^∞ at the origin is equal to 1. Also, since all the surfaces $\tilde{M}_n$ have been obtained by translations and homotheties in $\mathbb{R}^3$ of the original immersions $f_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^3$, and since all the Gauss map images of the f_n omit an open spherical disk of radius $\rho/2$ of the north pole in $\mathbb{S}^2$, it follows that M^∞ also omits such an open disk. By Theorem 4.2.2, we deduce that M^∞ is a plane. This contradicts the fact that the norm of the second fundamental form of M^∞ at the origin is equal to 1, finishing the proof. $\square$

Remark 4.2.4. In view of Proposition 3.3.2, item (c), the second fundamental form Σ can be replaced by the anisotropic second fundamental form of Σ in the statement of Theorem 4.2.3 without altering the conclusion.

4.3 Bernstein-type theorem for CAMC multigraphs

In this section we present a Bernstein-type Theorem for CAMC multigraphs, i.e., surfaces whose tangent plane at any of its points are not vertical (equivalently, each point on the surface has a neighborhood in which the surfaces can be viewed as a vertical graph). But first we need the following proposition.

Proposition 4.3.1. There is no entire vertical graph with constant mean anisotropic curvature $\Lambda \neq 0$.

Proof. This proof is analogous to the classic CMC case (see [75], Cor. 3.3.3, for example). Let $\Sigma = u(\mathbb{R}^2)$ be an entire vertical Λ -CAMC graph, for some smooth function $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Fix $p = (0, 0, u(0, 0)) \in \Sigma$ and take $R > \frac{\sqrt{3}}{|\Lambda|}d$, where d is the diameter of the Wulff shape W_F . There exists $M > 0$ such that $|u(x)| \leq M$, for all $x \in B_{\mathbb{R}^2}((0, 0), R)$. Consider $\tilde{W}$ the image of W_F by the homothety of scaling factor $-\Lambda/2$. Thus $\tilde{W}$ has constant anisotropic mean curvature Λ and it is possible to show that $\tilde{W}$ is contained in a round sphere of radius R centered at some point $\hat{o} \in \mathbb{R}^3$. Then we define $W(r)$ as the image of $\tilde{W}$ by the

translation that takes the point $\hat{o}$ to $p + re_3$, where $e_3 = (0, 0, 1)$. For $r > M + R$, $W(r)$ is completely above Σ . Decreasing r , we eventually obtain a first contact point between Σ and $W(r)$. If the normal vector of both surfaces coincide at the contact point, we apply the Maximum Principle to conclude that Σ is contained in $W(r)$, which is a contradiction. Otherwise, we replace e_3 by $-e_3$ in the previous construction and proceed in the same way. At this time the normals to Σ and $W(r)$ at the contact point will coincide. $\square$

Now we are able to proof the first main result of this thesis:

Theorem 4.3.2. Let Σ be a complete vertical multigraph, that is, for any $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ is not a vertical plane. Suppose that Σ has constant anisotropic mean curvature Λ . Then Σ is a plane.

Proof. If $\Lambda = 0$, the conclusion follows from Theorem 4.2.2. So, we can suppose, up to a homothety, that $\Lambda = 2$, and by Proposition 4.3.1 we can also suppose that Σ is not an entire graph.

Before proceed, we need to make some considerations and recall important facts. Let N be a unit vector field along Σ . Since Σ is a vertical multigraph, without loss of generality we can assume that Σ is a multigraph with respect to the plane $\{z = 0\}$ and $\langle N, e_3 \rangle$ is strictly positive. In particular, the Gauss map of Σ omits a hemisphere of $\mathbb{S}^2$, and by the completeness of Σ we may apply Theorem 4.2.3 to conclude it has bounded second fundamental form. Thus, by Theorem 4.1.1, there is $\delta > 0$ such that for any point $p \in \Sigma$, Σ is a graph over the disk $D(0, \delta) \subset T_p\Sigma$ of radius δ , centered at the origin of $T_p\Sigma$. Such graph will be denoted by $\mathcal{U}_p$. Let $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ be the canonical projection. We will denote by $\mathcal{U}_p^v$ the image of $\mathcal{U}_p$ under the vertical translation that takes p to $(\pi(p), 0)$.

Yet, we recall that given $q \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{S}^2$ and $\delta > 0$, there exists exactly one curve Γ that passes through q such that $\Gamma \times \mathbb{R}$ is a vertical 2-CAMC cylinder whose normal vector at $(q, 0)$ is v , as in Proposition 3.4.1. We denote by $\Gamma(q, \delta)$ the piece of Γ of length δ with q as its mid-point. Also, if $p \in \Gamma \times \mathbb{R}$ is one of its points, we denote by $\mathcal{D}(p, \delta)$ the neighborhood of p in $\Gamma \times \mathbb{R}$ that is a graph over $D(0, \delta) \subset T_p(\Gamma \times \mathbb{R})$. It is clear that the projection of $\mathcal{D}(p, \delta)$ by π coincides with $\Gamma(\pi(p), \delta)$.

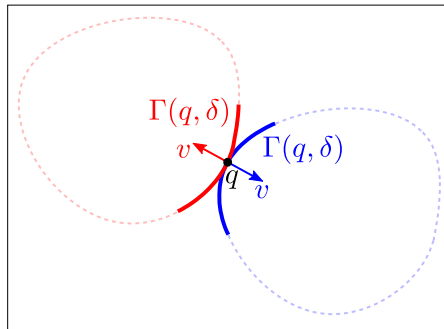


Figure 4.4: Two pieces of curves $\Gamma(q, \delta)$ that passes through q but have opposite unit normals there differ by a translation in $\mathbb{R}^3$.

With these considerations in mind, we begin proving the following assertion:

Claim 1: Let $\{p_n\}_n \subset \Sigma$ be any sequence such that $\pi(p_n) \rightarrow (q_0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ and $\langle N(p_n), e_3 \rangle \rightarrow 0$, that is, the planes $T_{p_n}\Sigma$ are becoming vertical as $n \rightarrow \infty$. Then the surfaces $\mathcal{U}_{p_n}^v$ converge to $\mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$, for some 2-CAMC cylinder $\Gamma \times \mathbb{R}$ that passes through $(q_0, 0)$. The convergence is in the C^2 -topology.

Proof of Claim 1. By the compactness of $\mathbb{S}^2$ we can suppose, up to a subsequence, that $\{N(p_n)\}_n$ converges to a horizontal vector $v_0 \in \mathbb{S}^2$, since $\langle N(p_n), e_3 \rangle \rightarrow 0$. In particular, the planes $T_{p_n}\Sigma$ converge to the vertical plane Q orthogonal to v_0 that passes through $(q_0, 0)$. We choose Γ as the unique horizontal curve that passes through q_0 such that $\Gamma \times \mathbb{R}$ is a vertical 2-CAMC cylinder whose normal direction at $(q_0, 0)$ coincides with v_0 .

Since $\mathcal{U}_{p_n}^v$ are graphs over $D(0, \delta) \subset T_{p_n}\Sigma$ and the planes $T_{p_n}\Sigma$ converge to $Q = T_{(q_0, 0)}(\Gamma \times \mathbb{R})$, given any $0 < \delta' < \delta$, for n sufficiently large, the surfaces $\mathcal{U}_{p_n}^v$ are bounded horizontal graphs over the disk $D(0, \delta') \subset Q$. Applying the same arguments of the proof of Theorem 4.2.3, we deduce that a subsequence of these graphs converges to a 2-CAMC surface S in the C^2 -topology. Moreover, S is tangent to Q at $(q_0, 0)$ and is a horizontal graph over $D(0, \delta) \subset Q$.

Now, we show that $S = \mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$. If it was not the case, then the intersection of S and $\mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$ at $(q_0, 0)$ would be non-transversal, and therefore it would consist of m smooth curves passing through $(q_0, 0)$, $m \geq 2$, meeting transversally at $(q_0, 0)$ (see [60], Corollary 4.6, pg. 159). In a neighborhood of $(q_0, 0)$, these curves separate S into $2m$ components. Adjacent components lie on opposite sides of $\mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$. Hence in a neighborhood of $(q_0, 0)$ in S , the unit normal vector field of S alternates from pointing up and down (or vice-versa) with respect to e_3 . Since $\mathcal{U}_{p_n}^v$ converges to S in the C^2 -topology, for n sufficiently large we have also that the unit normals points up and down, contradicting the fact that $\langle N, e_3 \rangle$ is positive.

Finally, it is worth to emphasize that the uniqueness of the limit $\mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$ is sufficient to prove that the whole sequence $\{\mathcal{U}_n^v\}_n$ converges $\mathcal{D}((q_0, 0), \delta)$, and not only a subsequence. $\square$

So, let us fix an arbitrary point $p \in \Sigma$ and assume that Σ is, in a neighborhood of p , a vertical graph of a function $u(x_1, x_2)$ defined on $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$, the open ball of $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ of radius R centered at $\pi(p)$. Since we are assuming that Σ is not an entire graph, there exists a largest value of R where u is well defined. In particular, there exists a point $q \in \partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ where u cannot be extended on any of its neighborhoods.

Claim 2: For any sequence $\{q_n\}_n \subset B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ converging to q , the tangent planes $T_{p_n}\Sigma$ (where $p_n := (q_n, u(q_n))$) converges to a vertical plane P . Moreover, such a plane is tangent to $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ at q .

Proof of Claim 2. First, we prove that any subsequence of $T_{p_n}\Sigma$ converges to a vertical plane. If it was not the case, since $\mathbb{S}^2$ is compact, there would exists a subsequence $\{q_{n_k}\}_k$ such that $\{N(p_{n_k})\}_k$ converges to some unit vector N_0 satisfying $\langle N_0, e_3 \rangle \neq 0$, and since Σ has bounded geometry and δ is the same for all points of Σ , for q_{n_k} close enough to q , the uniform graphs $\mathcal{U}_{p_{n_k}}^v$ provide an extension of u on a neighborhood of q , which is a contradiction.

Now we prove the second part. Let P be the vertical plane tangent to $\partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ at q . Suppose that for some subsequence $\{q_{n_k}\}_k$ the planes $T_{p_{n_k}}\Sigma$ converge to a vertical plane Q , $Q \neq P$. By Claim 1, $\mathcal{U}_{p_{n_k}}^v$ converges in the C^2 -topology to $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$, for a certain curve Γ . We know that $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$ is tangent to Q at $(q, 0)$, and since $Q \neq P$, this implies that there are points of $\Gamma(q, \delta)$ in the interior of $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$. Let z be one of these interior points. There exists a sequence $\{z_k\}_k$ with $z_k \in \mathcal{U}_{p_{n_k}}^v$ such that $z_k \rightarrow z$. Since the tangent plane of $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$ at z is also vertical, the gradient of u running along $\{z_k\}_k$ diverges (to see this, recall the expression of the normal vector field of a graph and verify what occurs with the gradient as the normal tends to be horizontal). But the

gradient of u at z is well defined, since z is an interior point of $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$. We have a contradiction. $\square$

Putting together Claims 1 and 2 we have the following conclusion: there is a curve Γ , profile of a 2-CAMC cylinder, that passes through q , tangent to $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ at q and such that for any sequence $\{q_n\}_n \subset B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ converging to q , $\{\mathcal{U}_{(q_n, f(q_n))}^v\}_n$ converges uniformly in the C^2 -topology to the neighborhood $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$ of $(q, 0)$ in $\Gamma \times \mathbb{R}$. The curve Γ is unique, since its unit normal at $(q, 0)$ is the limit of the normals of $\mathcal{U}_{(q_n, f(q_n))}^v$ at $(q_n, 0)$. Also, $\Gamma(q, \delta)$ lies outside $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$, otherwise, by the same arguments as in the proof of Claim 2, we would have an interior point z of $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ where $\text{grad}_{\mathbb{R}^2} u(x)$ diverges, as $x \in B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ approaches z .

Claim 3: Let $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the semi-open line segment parametrized by $\gamma(t) = tq + (1 - t)\pi(p)$. The function $z(t) = u(\gamma(t))$ satisfies either $\lim_{t \rightarrow 1^-} z(t) = +\infty$ or $\lim_{t \rightarrow 1^-} z(t) = -\infty$, according to whether $\gamma(t)$ lies either inside or outside Γ , for values of t close to 1.

Proof of Claim 3. Consider any sequence $\{t_n\}_n \subset [0, 1)$ converging to 1. Since $\gamma(t_n) \rightarrow q$, Claim 2 implies that $T_{(\gamma(t_n), z(t_n))}\Sigma$ are converging to a vertical plane, and as a consequence, $z'(t_n) \rightarrow \pm\infty$. So we can assume that the curve $C := (\gamma, u \circ \gamma)$ is strictly monotonous for values of t close to 1.

Now, if z were bounded above, there would be a sequence $\{t_n\}_n \subset [0, 1)$ with $t_n \rightarrow 1^-$ and such that $\{(\gamma(t_n), z(t_n))\}_n$ converges to a point $(q, c) \in \mathbb{R}^3$, for some $c \in \mathbb{R}$, that is, (q, c) is a cluster point of C . Moreover, the monotonicity of γ implies that C would have finite length up till (q, c) , whence we conclude that $\{(\gamma(t_n), z(t_n))\}_n$ is a Cauchy sequence on Σ . But since Σ is complete, we would have that $(q, c) \in \Sigma$, and in particular, Σ would have a vertical tangent plane at (q, c) , contradicting the fact it is a vertical multi-graph.

Finally, since we are supposing that $\langle N, e_3 \rangle > 0$ on Σ , we deduce that if $\lim_{t \rightarrow 1^-} z(t) = +\infty$ (resp. $-\infty$) then the (horizontal) limit of the unit normals of Σ along $(\gamma(t), z(t))$ points in the same direction as the vector $(\pi(p) - q, 0)$ (resp. $(q - \pi(p), 0)$), which is the unit vector of the limit cylinder $\Gamma \times \mathbb{R}$ at $(q, 0)$. Thus, the last assertion follows from the fact that such a limit cylinder is oriented with respect to its inner unit normal. $\square$

Let s be an arc length parameter to Γ and denote by $q(s) \in \Gamma$ the point at distance s from $q = q(0)$ along Γ . Consider the following subset of $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{\Gamma(s) + tn_\Gamma(s); s \in [-\delta, \delta], t \in (0, \epsilon)\}, \quad (4.3.1)$$

where $n_\Gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ denotes the unit normal vector of Γ at $q(s)$ that points toward $\pi(p)$ for $s = 0$.

For $t_0 \in [0, 1)$ we define:

$$\Sigma_{t_0} = \bigcup_{t_0 < t < 1} \mathcal{U}_{(\gamma(t), z(t))}, \quad (4.3.2)$$

which is a connected neighborhood of the curve $\{(\gamma(t), z(t)); t_0 < t < 1\} \subset \Sigma$.

Claim 4: There exists $t_0 > 0$ such that Σ_{t_0} does not intersect $\Gamma \times \mathbb{R}$. Moreover, Σ_{t_0} is a vertical graph over an open domain in $\mathbb{R}^2$ that contains $\mathcal{O}_\epsilon$, for some $\epsilon > 0$. Also, this graph extends u on $\mathcal{O}_\epsilon$ and satisfies $u(x) \rightarrow \pm\infty$ when $x \in \mathcal{O}_\epsilon$ converges to a point in Γ .

Proof of Claim 4. Consider $Q(s)$ the vertical plane that is orthogonal to Γ and passes through $q(s)$. Recall that $\mathcal{U}_{(\gamma(t), z(t))}^v$ converges in the C^2 -topology to $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$ as $t \rightarrow 1^-$.

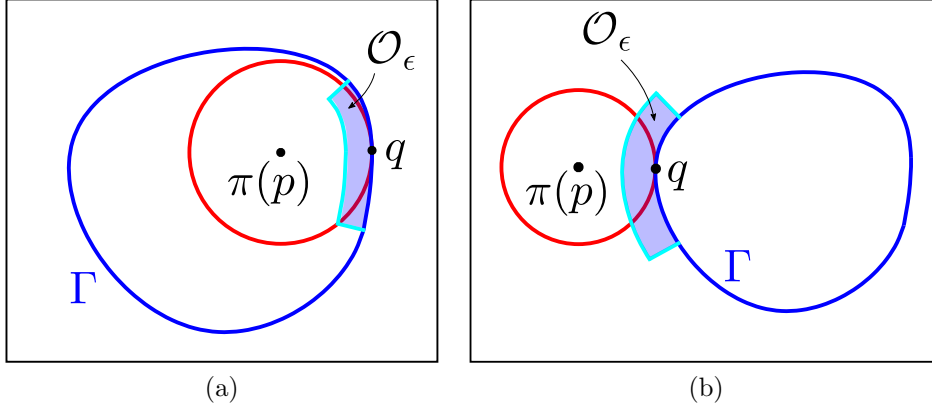


Figure 4.5: The small tubular neighborhood $\mathcal{O}_\epsilon$ of Γ around q , according to two possible scenarios: (a) $n_\Gamma(0) = (\pi(p) - q, 0)$; (b) $n_\Gamma(0) = (q - \pi(p), 0)$.

In particular, from the convergence in C^1 -topology and since transversality is a stable property, there exists $t_0 > 0$ such that $Q(s)$ intersects Σ_{t_0} transversally for all $s \in [-\delta, \delta]$.

Consider the curves $C(s) := \Sigma_{t_0} \cap Q(s)$. By Claim 3, $C(0) = C$ does not intersect $\Gamma \times \mathbb{R}$. Let us see that $C(s)$ does not intersect $\Gamma \times \mathbb{R}$, for all $s \in (0, \delta]$ (the argument is similar for $s \in [-\delta, 0)$).

Suppose that for some $s_0 \in (0, \delta]$, $C(s_0)$ contains either a point in $\Gamma \times \mathbb{R}$ or a point in the opposite side of $\Gamma \times \mathbb{R}$ relative to $C(0)$. In the second case, by continuity, for some intermediate value $0 < s_1 \leq s_0$, $C(s_1)$ has a point on $\Gamma \times \mathbb{R}$. Thus we can assume that $C(s_0)$ contain a point in $\Gamma \times \mathbb{R}$. But the convergence of $\mathcal{U}_{(\gamma(t), z(t))}^v$ to $\mathcal{D}((q, 0), \delta)$ as $t \rightarrow 1^-$ implies that $C(s_0)$ converges to $\{q(s_0)\} \times \mathbb{R}$ as the height diverges to infinity. These two facts oblige $C(s_0)$ to have a point where the tangent vector is vertical (see Fig. 4.6 (a)), contradicting the fact that Σ_{t_0} is a vertical multigraph. As a consequence, we conclude that for all $s \in [-\delta, \delta]$, $C(s)$ does not intersect $\Gamma \times \mathbb{R}$, and since these curves are asymptotic to $\Gamma \times \mathbb{R}$, there exists $\epsilon > 0$ such that Σ_{t_0} is a vertical graph over an open domain in $\mathbb{R}^2$ which contains $\mathcal{O}_\epsilon$ with the property that $u(x) \rightarrow \pm\infty$ when $x \in \mathcal{O}_\epsilon$ converges to a point in Γ (see Fig. 4.6 (b)). $\square$

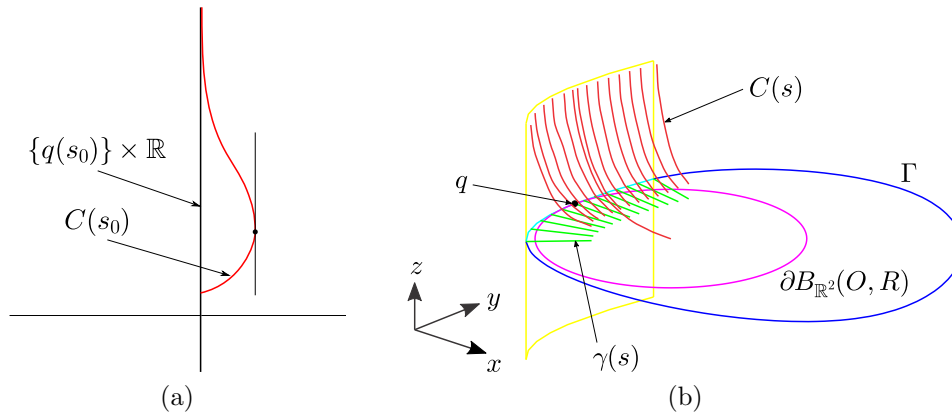


Figure 4.6: (a) A vertical tangent in the opposite side of $\Gamma \times \mathbb{R}$ relative to $B_{\mathbb{R}^2}(O, R)$; (b) The curves $C(s)$ for $s \in [-\delta, \delta]$ extend u in $\mathcal{O}_\epsilon$.

Next, notice that $q(\delta/2)$ plays the same role as q in Claims 2, 3 and 4. Replacing q and C by $q(\delta/2)$ and $C(\delta/2)$, and since δ is uniform for any point of Σ , applying the same

arguments of Claim 4, we are able to extend u near Γ in a bigger domain of the form

$$\{\Gamma(s) + tn_\Gamma(s); s \in [-\delta/2, 3\delta/2], t \in (0, \epsilon')\},$$

for some $0 < \epsilon' \leq \epsilon$. More generally, this argument can be applied inductively in both sides of Γ relative to q , and if $\Gamma(s)$ is an injective parametrization in the interval $(a, b]$, for some $a < 0 < b$, then there exists $\tilde{\epsilon} > 0$ for which we can extend u on the open domain

$$V_{\tilde{\epsilon}} = \{\Gamma(s) + tn_\Gamma(s); s \in (a, b), t \in (0, \tilde{\epsilon})\}. \quad (4.3.3)$$

At this point we observe that the conclusions we obtained up to now are also applicable

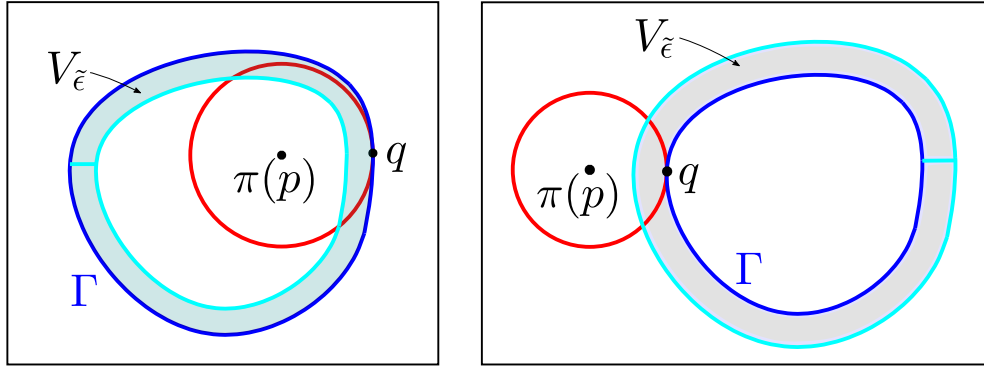


Figure 4.7: The tubular neighborhood of Γ according to equation (4.3.3).

for any point $p \in \Sigma$ and its associated point $q \in \partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$, according to with R is the maximum radius where Σ can be written as a vertical graph over the open ball $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$, and its associated 2-CAMC cylinder $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Another important observation here is that, since Σ is a multigraph (not necessarily a graph), we can no longer guarantee that any extension u in a neighborhood Γ as in equation (4.3.3), but for values of s in a bigger interval $(a', b') \supset (a, b)$, will glue together continuously as s reaches the values a and b . Despite this multi-evaluation difficulty, we will prove in the following the existence of a domain big enough where u is a graph and for which we can compare such a graph with the Wulff shape through the Maximum Principle. To do so, we split our arguments into two cases, according to whether γ lies locally either inside or outside the planar region bounded by Γ , for values of t close to 1.

Case 1: Let us suppose that there exists a point $p \in \Sigma$ such that its associated point $q \in \partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ and its associated 2-CAMC cylinder $\Gamma \times \mathbb{R}$ verify that the interior planar region bounded by Γ , that we call Ω , contain points of the line segment joining $\pi(p)$ to q .

In this case, we claim that u can be extended on the whole Ω . Indeed, consider $\tilde{q} \in \Gamma$ where the unit normals of Γ at q and $\tilde{q}$ coincide. Let $v := \tilde{q} - q$ and for $t \in [0, 1]$ define $\Gamma_t = \Gamma + tv$, the image of Γ under the translation by the vector tv . In particular $\Gamma_0 = \Gamma$ and for $0 < t \leq 1$, Γ_t divides Ω into two bounded regions (only one region, if $t = 1$). We are interested only in the region whose boundary contains q , that we call $\Omega(t)$.

By the arguments after Claim 4, we know that for sufficiently small values of t , u can be extended to $\Omega(t)$. Let us suppose that there exists a first value $0 < t_0 < 1$ for which u cannot be extended to $\Omega(t)$, for $t > t_0$. Then, there exists a point $q_0 \in \Gamma_{t_0}$ where u cannot be extended on any of its neighborhoods. Since u can be extended in an interior tubular neighborhood of $\Gamma - \{\tilde{q}\}$, we conclude that $q_0 \in \Omega$. Consider a point p_0 on the graph of u and $R' > 0$ such that the open ball $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R') \subset \Omega(t_0)$ and $q_0 \in$

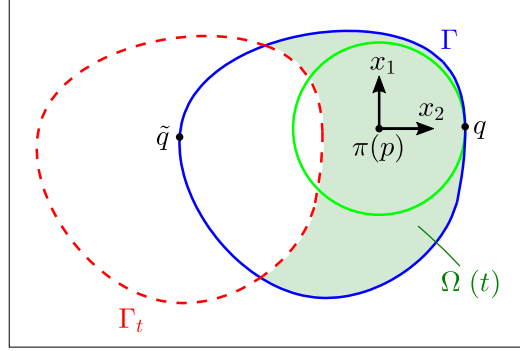


Figure 4.8: Definitions of the curve $\Gamma(t)$ and the open domain $\Omega(t)$.

$\partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R')$. Notice that by construction u is well defined on $\overline{B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R')} - \{q_0\}$. Reasoning as in Claims 1, 2 and 3, there exists a curve Γ' which is a translated copy of Γ , that passes through q_0 and have there a tangency point with $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R')$. Also, as $x \in B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R')$ approaches to Γ' , $u(x)$ diverges to either $+\infty$ or $-\infty$ according to whether $B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p_0), R')$ is contained in the interior or the exterior open region delimited by Γ' , respectively. For the first case, in a small neighborhood $U \subset \Gamma'$ of q_0 , we have that $U - \{q_0\}$ is also contained in $\Omega(t_0)$, and in these points we deduce that u diverges to $+\infty$, contradicting the fact that u is well defined in $\Omega(t_0)$ (see Fig. 4.9 (a)). In the second case, note that Γ' intersects Γ . Let $x \in \Gamma \cap \Gamma'$ be one of these points (see Fig. 4.9 (b)). If $\{x_n\} \subset \Omega(t_0)$ is converging to x , by the fact that $x \in \Gamma$ we deduce that $u(x_n) \rightarrow +\infty$. On the other hand, since $x \in \Gamma'$ we also deduce that $u(x_n) \rightarrow -\infty$, leading to a contradiction.

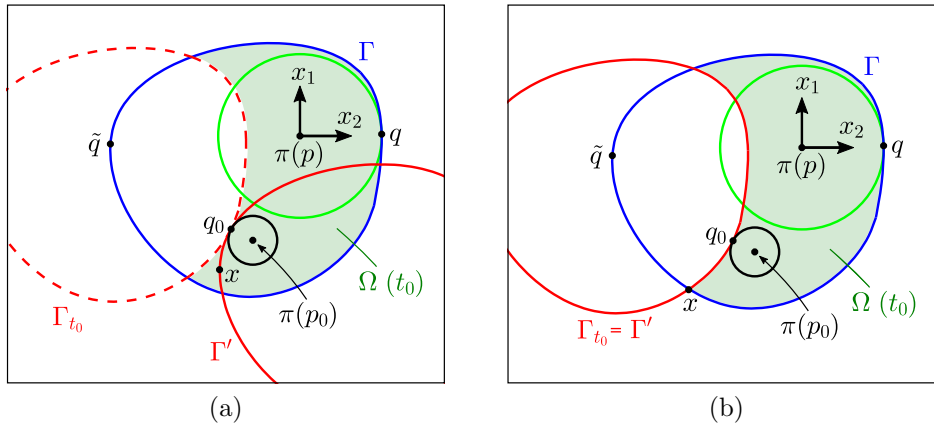


Figure 4.9: Extension of u on $\Omega(t_0)$. Two possible scenarios occur: (a) $\Gamma' \neq \Gamma_{t_0}$; (b) $\Gamma' = \Gamma_{t_0}$.

From these informations, we conclude that Σ contains a vertical graph of a function u defined over the open domain Ω bounded by Γ . Moreover, if $x \in \Omega$ approaches to a point in Γ , then $u(x) \rightarrow +\infty$.

Now, consider W the image of the Wulff shape by the antipodal map. With respect to the inner pointing unit normal, W has anisotropic mean curvature 2. Recall that $G : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ given by $G(x, y, z) = \text{grad}_{\mathbb{S}^2} F(x, y, z) + F(x, y, z)(x, y, z)$ is a parametrization of the Wulff shape. Thus $-G$ parametrizes W and since it is a diffeomorphism, we define the *south hemisphere* of W as the set $\mathcal{S} = -G(\mathbb{S}_+^2)$, where $\mathbb{S}_+^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_3 \geq 0\}$. In view of Proposition 3.4.1, consider $W(0)$ a copy of W obtained after a translation in a

way that its orthogonal projection over $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ contains $\bar{\Omega}$ in its interior. In other words, $\Gamma \times \mathbb{R}$ is transversal to $W(0)$. Let $W(r)$ be the image of $W(0)$ after a vertical translation by re_3 . We define $\mathcal{S}(r)$ analogously. For very negative values of r , $\mathcal{S}(r) \cap \Sigma = \emptyset$. Increasing r we eventually obtain a first interior contact point between $\mathcal{S}(r)$ and Σ . As the normal vectors of $\mathcal{S}(r)$ and Σ at the contact point coincide, we conclude by the Maximum Principle that $\Sigma = W(r)$, leading to a contradiction since Σ is not compact.

Case 2: For any point $p \in \Sigma$ with associated point $q \in \partial B_{\mathbb{R}^2}(\pi(p), R)$ and associated 2-CAMC cylinder $\Gamma \times \mathbb{R}$, $\pi(p)$ lies outside the planar region defined by Γ .

Take any point $p_0 \in \Sigma$ and consider $R > 0$ the maximum radius for which Σ is the vertical graph of a smooth function u defined on $B(\pi(p_0), R)$. Let $q_0 \in \partial B(\pi(p_0), R)$ be a point where u cannot be extended on any of its neighborhoods and let $\Gamma_0 \times \mathbb{R}$ denote the 2-CAMC vertical cylinder tangent to $B(\pi(p_0), R)$ at q_0 on its concave side.

Consider $\tilde{q}_0 \in \Gamma_0 - \{q_0\}$ the unique point for which the normal lines of Γ_0 at q_0 and $\tilde{q}_0$ are parallel. Let $2\Gamma_0$ be the curve obtained as the image of Γ_0 by a double scale homothety followed by a translation in such a way that $2\Gamma_0$ is tangent to Γ_0 at $\tilde{q}_0$ and contains Γ_0 in its interior (see Fig. 4.10).

Let $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a smooth, injective homotopy so that for each $t \in [0, 1]$, $H_t := H(t, \cdot) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizes the image of Γ_0 by a homothety followed by a translation, in such a way that: (a) for $0 \leq t < 1$, $H_t(\mathbb{S}^1)$ is contained in the interior region bounded by $2\Gamma_0$; (b) $H_0(\mathbb{S}^1)$ is contained in $B(\pi(p_0), R) \cup \{q_0\}$ and it is tangent to $\partial B(\pi(p_0), R)$ at q_0 ; (c) $H_1(\mathbb{S}^1) = 2\Gamma_0$.

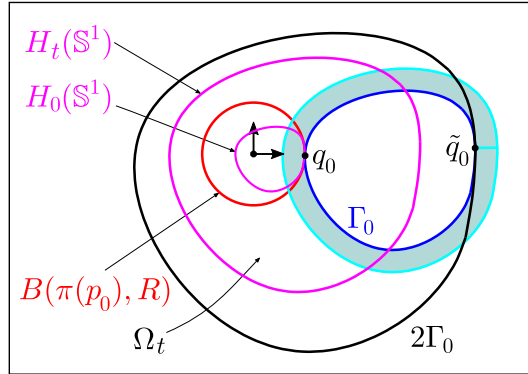


Figure 4.10: Definitions of the convex curve $H_t(\mathbb{S}^1)$ and the compact domain Ω_t .

For each $t \in [0, 1]$, let Ω_t denote the compact convex domain bounded by $H_t(\mathbb{S}^1)$, and consider S_t the connected component of $\Sigma \cap (\Omega_t \times \mathbb{R})$ that contains p_0 . If $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, it is clear that $S_{t_1} \subset S_{t_2}$. Our objective is to show that S_1 is a vertical graph, that is, u can be extended on $\pi(S_1)$. To do so, consider $\mathcal{I}$ the set of values $t \in [0, 1]$ for which S_t is a graph of (an extension of) u defined over a domain $\tilde{\Omega}_t \subset \Omega_t$ given as

$$\tilde{\Omega}_t = \Omega_t - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{m(t)}), \quad (4.3.4)$$

for some $m(t) \in \mathbb{N}$. Here each D_i is the compact convex domain bounded by some translation of the curve Γ_0 , and $D_i \cap D_j \cap \Omega_t = \emptyset$, for $0 \leq i < j \leq m$. Note that in such decompositions $D_i \cap \Omega_t$ could consist of only one point.

First we note that $0 \in \mathcal{I}$, in which case $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 - D_0$, being D_0 the compact domain bounded by Γ_0 . We also observe that if $0 < t_1 < t_2$ and $t_2 \in \mathcal{I}$, then $t_1 \in \mathcal{I}$. Therefore, $\mathcal{I}$ is an interval of the form $[0, a)$ or $[0, a]$ for some $a \leq 1$. Moreover, the same domains D_i appearing in the decomposition of $\tilde{\Omega}_{t_1}$ (according to equation (4.3.4)) will appear in the

decomposition of $\tilde{\Omega}_{t_2}$. In particular, the numbers $m(t)$ are non-decreasing with respect to t .

Suppose that $\mathcal{I} = [0, a]$ for some $0 < a < 1$. In particular, there exists $m(a) \in \mathbb{N}$ such that S_a is a graph over

$$\tilde{\Omega}_a = \Omega_a - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{m(a)}). \quad (4.3.5)$$

We want to prove that for small values $\epsilon > 0$, $S_{a+\epsilon}$ is a graph over Ω_a minus the same domains $D_0, D_1, \dots, D_{m(a)}$. Note that for any $i \in \{1, \dots, m(a)\}$ we have that $\Gamma_i \cap \partial\Omega_a$ either consists of two points or Γ_i is tangent to Ω_a on its concave side. Indeed, if it does not occur, we conclude that $D_i \subset \Omega_a$, and in particular $D_i \subset \Omega_1$, which implies that $D_i \cap D_0 \neq \emptyset$, since two translations of Γ_0 do not fit inside $2\Gamma_0$ without have an intersection point. But again $D_i \subset \Omega_a$ implies that $D_i \cap D_0 \cap \Omega_a \neq \emptyset$, which is a contradiction. Thus, in any case, by the arguments of the first part of this proof u can be extended in a small exterior tubular neighborhood of each curve Γ_i , around their intersection points with $\partial\Omega_a$. Note that there are finitely many such intersection points, since the intersection of each Γ_i with $\partial\Omega_a$ consists of at most two points. Thus, we can choose such exterior tubular neighborhoods so small that they do not overlap each other (see Fig. 4.11). The remaining points of $\partial\Omega_a$ constitute a compact set satisfying that for each of its points there is a small neighborhood where u can be extended. Therefore, for small values $\epsilon > 0$, the domains $D_0, D_1, \dots, D_{m(a)}$ are mutually disjoint inside $\Omega_{a+\epsilon}$ and $S_{a+\epsilon}$ is a graph over $\Omega_{a+\epsilon} - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{m(a)})$.

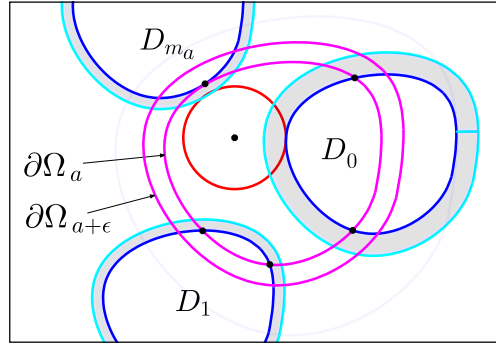


Figure 4.11: Decomposition of the domain $\tilde{\Omega}_{a+\epsilon}$.

Assume next that $\mathcal{I} = [0, a]$, $a \leq 1$. Note that S_a is a graph. To see this, suppose that there would be two points $p_1, p_2 \in S_a$ with $\pi(p_1) = \pi(p_2)$. We assume that $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ do not lie in $\partial\Omega_a$, otherwise since S_a is a vertical multigraph and $p_1 \neq p_2$, we could find $\tilde{p}_1$ close to p_1 and $\tilde{p}_2$ close to p_2 in S_a such that $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$ and whose projections under π coincide and lie in the interior of Ω_a . Since S_a is connected, there are two curves $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow S_a$ joining p_1 to p_0 and p_2 to p_0 , respectively. If $\pi \circ c_1([0, 1])$ intersects $\partial\Omega_a$, from the fact that $X = \{s \in [0, 1]; \pi \circ c_1(s) \in \partial\Omega_a\}$ is compact and that for every $s \in X$ there is a neighborhood of $c_1(s)$ in S_a that is a vertical graph, we can cover $c_1(X)$ with such neighborhoods and after extracting a finite subcover, it is possible to deform c_1 in order to obtain a new curve $\tilde{c}_1 : [0, 1] \rightarrow S_a$ joining p_1 to p_0 , whose image under π does not intersect $\partial\Omega_a$. The same argument is valid for c_2 . Thus $\pi \circ c_1$ and $\pi \circ c_2$ are compact curves contained in the interior of Ω_a , implying the existence of $b < a$ so that $\pi \circ c_1([0, 1]), \pi \circ c_2([0, 1]) \subset \Omega_b$. In particular we conclude that p_1 and p_2 belongs to S_b . But it contradicts the fact that S_b is a graph. Therefore S_a is a graph.

Now we prove that S_a is a graph over Ω_a , with exception of exactly the same domains D_i which appear in the decomposition of Ω_b , for $b < a$, and domains bounded by

translations of Γ_0 that are tangent to $\partial\Omega_a$ on its concave side.

Given any $b < a$, we can write

$$\tilde{\Omega}_b = \Omega_b - (D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_{m(b)}), \quad (4.3.6)$$

for some $m(b) \in \mathbb{N}$, where each D_i is the compact convex domain bounded by some translation of the curve Γ_0 , and $D_i \cap D_j \cap \Omega_b = \emptyset$, for any $0 \leq i < j \leq m(b)$. Moreover, since $c \in \mathcal{I}$ for any $b < c < a$, we conclude that $D_i \cap D_j \cap \Omega_c = \emptyset$, for all $0 \leq i < j \leq m(b)$. Thus, if $D_i \cap D_j \cap \Omega_a \neq \emptyset$ for some $0 \leq i < j \leq m(b)$, the intersection necessarily occur in $\partial\Omega_a$ (see Fig. 4.12 (a)). Let us see that neither this scenario occur. Without loss of

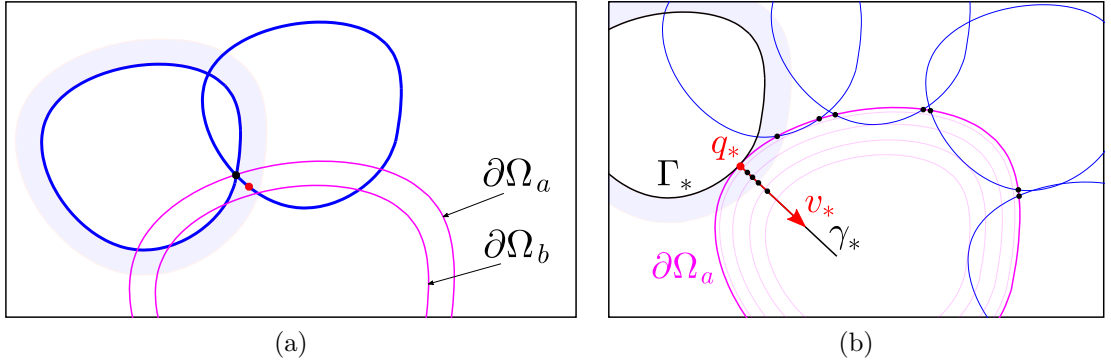


Figure 4.12: (a) The intersection $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ occurs necessarily in $\partial\Omega_a$; (b) Auxiliary figure to prove the boundedness of $m(t)$.

generality, we can suppose $j > 0$. We claim that Γ_j has points outside Ω_a . Indeed, if it does not occur, we would have that $\Gamma_j \subset \Omega_a$, implying that $\Gamma_j \cap \Gamma_0 \cap \Omega_a \neq \emptyset$. As $\Gamma_j \neq \Gamma_0$, the intersection $\Gamma_j \cap \Gamma_0$ consists of either one point, if Γ_j and Γ_0 are tangent, or two points, otherwise. In the first case, the tangency point is not $\tilde{q}_0$, otherwise Γ_j would be tangent to $2\Gamma_0$ on its concave side, and in particular Γ_j would lie outside Ω_b . However, we know that u can be extended in a small exterior tubular neighborhood of Γ_0 around this tangency point, and this gives a contradiction. Thus, the intersection $\Gamma_j \cap \Gamma_0$ consists of exactly two points, and at least one of them necessarily belongs to Ω_c , for some $0 < c < a$, since $\Gamma_j \subset \Omega_a$ and Γ_j could have at most one point in common with $\partial\Omega_a$. In other words, we would conclude that $D_j \cap D_0 \cap \Omega_c \neq \emptyset$, which contradicts $c \in \mathcal{I}$. Thus, by the arguments in the first part of the proof we can extend u in small exterior tubular neighborhood of Γ_j around its intersections with $\partial\Omega_a$, and in particular this implies that $D_i \cap D_j \cap \Omega_a = \emptyset$.

On the other hand, since $t \mapsto m(t)$ is non-decreasing, we need to show that $m(t)$ is bounded as $t \rightarrow a^-$. If it does not happen, we would have a strictly monotonous sequence $\{t_n\}_n$ with $t_n \rightarrow a^-$ and domains $\{D_{m(t_n)}\}_n$ (which rises in the decomposition of $\tilde{\Omega}_{t_n}$), each one bounded by translations Γ_{t_n} of Γ_0 , and mutually disjoint inside Ω_a . We also can suppose that Γ_{t_n} are tangent to $\partial\Omega_{t_n}$ on its concave side, and that $\Gamma_{t_n} \cap \partial\Omega_a = \{q_1^n, q_2^n\}$. In particular there exists a cluster point $q_* \in \partial\Omega_a$ of $\{q_1^n, q_2^n\}_n$. Let $v_* \in \mathbb{R}^2$ denote the inner unit normal of $\partial\Omega_a$ at q_* and consider the curve $\gamma_* : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ given by $\gamma_*(s) = q_* + sv_*$ (see Fig. 4.12 (b)). Note that u is well defined along γ_* , for small values $s > 0$. Given any sequence $\{s_n\}_n \subset (0, 1]$ with $s_n \rightarrow 0^+$, we have that the planes $T_{p_n} \Sigma$ ($p_n := (\gamma_*(s_n), u(\gamma_*(s_n)))$) are becoming vertical, otherwise by the same arguments as in the proof of Claim 2 we could extend u in a neighborhood of q_* . Thus Claim 1 implies the uniform graphs $\mathcal{U}_{p_n}^v$ converge to $\mathcal{D}((q_*, 0), \delta)$, for some CAMC cylinder $\Gamma_* \times \mathbb{R}$ that passes through $(q_*, 0)$. Moreover, the unit normal of $\mathcal{D}((q_*, 0), \delta)$ at $(q_*, 0)$ is parallel to

v_* . Indeed, if it is not the case, $\Gamma_*(q_*, \delta)$ would have points in the interior of Ω_b , for all $b < a$ sufficiently close to a . Suppose that for some $b < a$ and some $i \in \{1, \dots, m(b)\}$, the curve $\Gamma_*(q_*, \delta)$ intersects ∂D_i . In this case, since $q_* \notin D_i$, there is a point $x \in \Gamma_*(q_*, \delta)$ that lies outside D_i , but inside the exterior tubular neighborhood of ∂D_i for which u is well defined. Choosing $b < c < a$ sufficiently close to a , we can also suppose that $x \in \tilde{\Omega}_c$. If $\Gamma_*(q_*, \delta)$ does not intersect ∂D_i for any $b < a$ and any $i \in \{1, \dots, m(b)\}$, the existence of such a point $x \in \Gamma_*(q_*, \delta)$ is trivial. In any case, for each $n \in \mathbb{N}$ there exists $b_n = (\pi(b_n), u(\pi(b_n))) \in \mathcal{U}_{p_n}^v$ so that $\{b_n\}_n$ converges to $(x, 0)$. But since the planes $T_{b_n}\Sigma$ are becoming vertical, we conclude that $|\text{grad } u(\pi(b_n))| \rightarrow \infty$, which is impossible since $\pi(b_n) \rightarrow x$ and u is well defined around x . Thus, the unit normal of $\mathcal{D}((q_*, 0), \delta)$ at $(q_*, 0)$ is parallel to v_* . Moreover, as $\{q_1^n, q_2^n\}_n$ converges to q_* , at points sufficiently close to q_1^n and q_2^n the normals of the graph of u are becoming horizontal and point inward $\partial D_{m(t_n)}$, whence we may also deduce that the unit normal of $\mathcal{D}((q_*, 0), \delta)$ at $(q_*, 0)$ coincides with $-v_*$. In particular, Γ_* is tangent to $\partial\Omega_a$ at q_* on its concave side. From now on, the arguments in the proofs of Claims 3 and 4 are also applicable for $\mathcal{D}((q_*, 0), \delta)$, and we conclude that u can be extended in a small exterior tubular neighborhood of Γ_* around q_* , as in equation (4.3.4). In other words, q_* is an isolated point of $\partial\Omega_a$, which is a contradiction. We denote $m_a := \sup\{m(t); t < a\}$.

Now, if y is any point in $\partial(\Omega_a - \pi(S_a))$ which does not lie in the boundary of the domains D_i for any $b < a$, then there exists a curve Γ_y , translation of Γ_0 , which is tangent to $\partial\Omega_a$ at y on its concave side, such that u can be extended in a unique way on an small exterior tubular neighborhood of Γ_y around y . From the same arguments we use previously, we deduce that there are only finitely many such points y in $\partial\Omega_a$. If $y_{m_a+1}, \dots, y_{m_a+k} \in \partial\Omega_a$ denote such points, the domains $D_{m_a+1}, \dots, D_{m_a+k}$ corresponding to the curves $\Gamma_{y_1}, \dots, \Gamma_{y_k}$, respectively, together with the domains $D_0, D_1, \dots, D_{m_a}$ satisfy:

- $D_i \cap D_j \cap \Omega_a = \emptyset, \quad \forall 0 \leq i < j \leq m_a + k;$
- $\pi(S_a) = \Omega_a - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{m_a} \cup D_{m_a+1} \cup \dots \cup D_{m_a+k}),$

and this proves that $a \in \mathcal{I}$.

We conclude from all these arguments that $\mathcal{I} = [0, 1]$ and S_1 is a graph of an extension of u defined over

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 - (D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{m(1)}), \quad (4.3.7)$$

for some $m(1) \in \mathbb{N}$, where $\{D_0, D_1, \dots, D_{m(1)}\}$ consists of mutually disjoint compact domains such that ∂D_i is a translation of Γ_0 , for each $0 \leq i \leq m(1)$. Moreover, by Claim 3 $u(x) \rightarrow -\infty$ as $x \in \tilde{\Omega}_1$ approaches to ∂D_i , for any $i \in \{0, 1, \dots, m(1)\}$.

As we did in Case 1, consider W the image of the Wulff shape by the antipodal map and $W(0)$ the copy of W obtained after a translation in such a way that its orthogonal projection over $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ coincides with Ω_1 . Let $W(r)$ be the image of $W(0)$ after a vertical translation by re_3 . For very positive values of r , $W(r) \cap S_1 = \emptyset$. Decreasing r we eventually obtain a first contact point $x \in W(r) \cap S_1$. We observe that x does not belong to ∂S_1 , otherwise the unit normal of S_1 at this point would be horizontal, contradicting the fact that Σ is a vertical multigraph. Thus x is an interior contact point, and as the normal vectors of $W(r)$ and S_1 at x coincide, we conclude that $W(r) = S_1$, by the Maximum Principle, leading to a contradiction. Therefore, the complete multigraph Σ with constant anisotropic mean curvature 2 does not exist, finishing the proof. $\square$

An immediate consequence of Theorem 4.3.2 is the following corollary.

Corollary 4.3.3. Let Σ be a complete CAMC surface whose Gauss map image is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^2$. Then Σ is either a plane or a CAMC cylinder.

Proof. The hypothesis implies that there exists $a \in \mathbb{S}^2$ such that $\langle N, a \rangle \geq 0$ on Σ . We recall that Proposition 3.3.4 implies

$$\Delta_F \langle N, a \rangle + \text{trace}_\Sigma(AA_F) \langle N, a \rangle = 0.$$

Since this equation is elliptic, by the Maximum Principle, either $\langle N, a \rangle = 0$ or $\langle N, a \rangle > 0$. In the first case we deduce that Σ is either a CAMC cylinder or a plane parallel to a . In the second case, we deduce that Σ is a CAMC multigraph, and Theorem 4.3.2 implies Σ is a plane. $\square$

Another interesting corollary of Theorem 4.3.2 concerns about CAMC surfaces whose Gauss curvature does not change sign.

Theorem 4.3.4. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete immersed surface of constant anisotropic mean curvature $\Lambda \neq 0$. If the Gaussian curvature of Σ does not change sign then Σ is one of the following surfaces:

- (i) a CAMC cylinder;
- (ii) the Wulff shape (up to a homothety).

Our proof of Theorem 4.3.4 relies on very different techniques to those used in the proof of its isotropic version, given by T. Klotz and R. Osserman, in [63]. For this reason, we need to recall three results:

Theorem 4.3.5. (Pogorelov's Theorem, see [86] and [87]; Hartman-Nirenberg Theorem, see [50]) Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete immersed surface with vanishing Gaussian curvature everywhere. Then Σ is a generalized cylinder.

Theorem 4.3.6. (Sacksteder's Theorem; see [94] or [18]) Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete and oriented immersed surface with non-negative Gaussian curvature. Suppose that at least for one point on Σ , the Gaussian curvature is positive. Then Σ is embedded in $\mathbb{R}^3$ and it is the boundary of an open convex subset of $\mathbb{R}^3$.

Theorem 4.3.7. (The principal curvature theorem for hypersurfaces; see [95]) Let Σ be a complete immersed orientable hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$, which is not a hyperplane, and let A denote its Weingarten operator with respect to a global unit normal field. Let $\Omega \subset \mathbb{R} - \{0\}$ be the set of nonzero values assumed by the eigenvalues of A and put $\Omega^+ = \Omega \cap (0, +\infty)$ and $\Omega^- = \Omega \cap (-\infty, 0)$.

- (i) If Ω^+ and Ω^- are both nonempty, $\inf \Omega^+ = \sup \Omega^- = 0$;
- (ii) If Ω^+ or Ω^- is empty then the closure of Ω is connected.

Proof of Theorem 4.3.4. We begin by observing that up to a homothety, we may assume that $\Lambda > 0$.

Let us suppose that the Gaussian curvature of Σ is non-negative. If it vanishes everywhere, by Theorem 4.3.5 we obtain item (i). So, we can suppose that there exists a point on Σ where the Gaussian curvature is positive. In this case we apply Theorem 4.3.6 to conclude that Σ is embedded in $\mathbb{R}^3$ and that it is the boundary of an open convex subset of $\mathbb{R}^3$. If Σ is compact, the anisotropic version of the Alexandrov's Theorem (see [56])

implies that it is the Wulff shape, up to a homothety. Thus we may assume that Σ is not compact. In particular, since Σ is the boundary of an open convex set, if $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ denotes its Gauss map (for which Λ is evaluated), we have that $N(\Sigma)$ is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^2$. By Corollary 4.3.3 we deduce that Σ is a Λ -CAMC cylinder.

If the Gaussian curvature is non-positive, the principal curvatures of Σ have opposite signs, let us say, $\kappa_1(p) \leq 0$ and $\kappa_2(p) \geq 0$, for all $p \in \Sigma$. Recalling formula 3.3.2 we have

$$\Lambda = \gamma_1(p)\kappa_1(p) + \gamma_2(p)\kappa_2(p),$$

where $\frac{1}{M} \leq \gamma_1(p), \gamma_2(p) \leq \frac{1}{m}$ and m, M are respectively the infimum and supremum of the principal curvatures of the Wulff shape. Therefore,

$$\gamma_2(p)\kappa_2(p) = \Lambda - \gamma_1(p)\kappa_1(p) \geq \Lambda,$$

which implies

$$\kappa_2(p) \geq \frac{\Lambda}{\gamma_2(p)} \geq m\Lambda.$$

So, we have $k_1(p) \leq 0 \leq m\Lambda \leq k_2(p)$, whence we conclude that Σ is a flat surface by applying Theorem 4.3.7. Applying Theorem 4.3.5 again we conclude that Σ is a CAMC cylinder. $\square$

4.4 Height estimates for CAMC graphs

Putting together the results of the previous sections, we are able to prove uniform height estimates for CAMC graphs, that is stated precisely in the next theorem:

Theorem 4.4.1. Let $\Lambda \neq 0$ be a real number. Then there is a constant $C = C(\Lambda) > 0$ such that for any closed (not necessary bounded) domain Ω of the plane $\Pi = \{v\}^\perp$ and smooth function $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ that vanishes on $\partial\Omega$ and whose graph Σ over Π is a Λ -CAMC surface, the height of any point $p \in \Sigma$ relative to Π is at most C .

Remark 4.4.2. The best constant C in Theorem 4.4.1 satisfies the following property

$$C(\mu\Lambda) = \frac{1}{|\mu|}C(\Lambda), \quad \text{for any } \mu \neq 0. \quad (4.4.1)$$

Proof of Theorem 4.4.1. The proof is by contradiction, and for simplicity we will assume that $\Lambda > 0$. Let us suppose that there is no uniform height estimates for Λ -CAMC graphs with planar boundary. Thus, for each $n \in \mathbb{N}$ there are a unit vector v_n , a Λ -CAMC graph Σ_n over $\Pi_n = \{v_n\}^\perp$ with $\partial\Sigma_n \subset \Pi_n$ and a point $p_n \in \Sigma_n$ such that the height of p_n relative to Π_n is greater than n .

Since $\theta_n := \langle N_n, v_n \rangle$ is a non-vanishing function, for all $n \in \mathbb{N}$, up to a subsequence of $\{\Sigma_n\}_n$ (that we also call it $\{\Sigma_n\}_n$) we can suppose, without loss of generality, that $\langle N_n, v_n \rangle > 0$ on Σ , for all $n \in \mathbb{N}$, and that $v_n \rightarrow v_0$, for some unit vector v_0 . By the Maximum Principle, as in the proof of Lemma 4.2.1, we conclude that Σ_n is contained in the half-space $\{y \in \mathbb{R}^3; \langle y, v_n \rangle \leq 0\}$, for all $n \in \mathbb{N}$. So, from now on, for simplicity, we adopt a new coordinate system in $\mathbb{R}^3$ where $v_0 = e_3 = (0, 0, 1)$.

Let $\Sigma_n^* := \Sigma_n \cap \{y \in \mathbb{R}^3; \langle y, v_n \rangle \leq 2R\}$, where R is given by Lemma 4.2.1. For n large enough we have $p_n \in \Sigma_n^*$. Let $q_n \in \Sigma_n^0$ be the point of maximum distance relative to Π_n and let Σ_n^1 be the image of Σ_n^0 by the translation that takes q_n to the origin of $\mathbb{R}^3$. Since $\theta_n > 0$, for all $n \in \mathbb{N}$, by Theorem 4.2.3 (with $d = 2R$) there is a constant

M that only depends on Λ (but not on n) such that $\{|\sigma_n|\}_n$ is uniformly bounded by M , where σ_n denotes the second fundamental form of Σ_n^0 . Notice that the distance in $\mathbb{R}^3$ of the origin to $\partial\Sigma_n^0$ is diverging to $+\infty$, since $d_{\mathbb{R}^3}(p_n, \Pi_n) > n$. In other words, this means that the geodesic disks $D_{\Sigma_n^0}(0, n)$ are contained in the interior of Σ_n^0 , and we may apply Theorem 4.1.2 in order to obtain a subsequence of $\{\Sigma_n^0\}_n$ that converges uniformly on compact sets in the C^2 -topology to a complete (possibly non-connected) Λ -CAMC surface Σ_∞ that passes through the origin and whose norm of its second fundamental form σ_∞ is bounded by M . Moreover, Σ_∞ is tangent to the horizontal plane at the origin, since $N_n(q_n) = v_n \rightarrow e_3$. From now on, we only consider the connected component of Σ_∞ that passes through the origin, and we still denoting it by Σ_∞ .

Let us define $\theta_\infty = \langle N_\infty, e_3 \rangle$, where N_∞ is the unit normal vector field of Σ_∞ , with $N_\infty((0, 0, 0)) = e_3$. As the graphs Σ_n^0 converge uniformly on compact sets to Σ_∞ and $\theta_n > 0$, for all $n \in \mathbb{N}$, we conclude that $\theta_\infty \geq 0$ on Σ_∞ . In other words, the Gauss map image of Σ_∞ is contained in a closed hemisphere of $\mathbb{S}^2$, and by Corollary 4.3.3 we conclude that Σ_∞ is a Λ -CAMC cylinder. In particular, the image of N_∞ is a great circle passing through $N_\infty((0, 0, 0)) = e_3$, contradicting that θ_∞ is non-negative. $\square$

A first consequence of Theorem 4.4.1 are Height Estimates for compact CAMC surfaces with planar boundary. Since its proof involves the Alexandrov's Reflection Method, we need to impose an additional assumption: the plane that contains the boundary of the surface is also a symmetry plane for the Wulff shape. For the proof of these Height Estimates for compact CAMC surfaces, we need to do the following consideration

Proposition 4.4.3. let $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a symmetry with respect to some plane $P_0 \subset \mathbb{R}^3$, and suppose that the anisotropy function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is invariant under s , that is, $F(s(y)) = F(y)$, for all $y \in \mathbb{S}^2$. If $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is any surface with anisotropic Gauss map $\nu : \Sigma \rightarrow W_F$, then

$$\tilde{\nu}(s(p)) = s(\nu(p)), \quad \forall p \in \Sigma.$$

where $\tilde{\nu} : s(\Sigma) \rightarrow W_F$ is the anisotropic Gauss map of $s(\Sigma)$, the image of Σ by s .

Proof. Let $N_W : W_F \rightarrow \mathbb{S}^2$ denote the outward pointing Gauss map of the Wulff shape W_F and consider $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ and $\tilde{N} : s(\Sigma) \rightarrow \mathbb{S}^2$ the Gauss maps of Σ and $s(\Sigma)$, respectively. First, we notice that

- $s(N_W(z)) = N_W(s(z))$, for all $z \in W_F$;
- $s(N_W^{-1}(y)) = N_W^{-1}(s(y))$, for all $y \in \mathbb{S}^2$.

To see this, consider $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ the homogeneous extension of F , that is, $\tilde{F}(x) = |x|F\left(\frac{x}{|x|}\right)$, for $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. In this way we have that

$$N_W^{-1}(y) = (\text{grad}_{\mathbb{S}^2} F)_y + 2F(y)y = (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_y, \quad \forall y \in \mathbb{S}^2.$$

This information together with the fact that s is an orthogonal transformation, we obtain

$$\begin{aligned} \langle (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F} \circ s)_y, w \rangle &= d(\tilde{F} \circ s)_y \cdot w = d\tilde{F}_{s(y)} \cdot ds_y \cdot w = \langle (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_{s(y)}, ds_y \cdot w \rangle \\ &= \langle (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_{s(y)}, s(w) \rangle = \langle s^{-1}((\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_{s(y)}), w \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

On the other hand, it is easy to see that $\tilde{F}$ is invariant under s , and this information leads us to

$$\langle (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F} \circ s)_y, w \rangle = \langle (\text{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_y, w \rangle, \quad \forall w \in \mathbb{R}^3,$$

implying that

$$(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_{s(y)} = s((\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_y)$$

Therefore,

$$N_W^{-1}(s(y)) = (\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_s(y) = s((\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^3} \tilde{F})_y) = s(N_W^{-1}(y)), \quad \forall y \in \mathbb{S}^2,$$

that is, $s \circ N_W^{-1} = N_W^{-1} \circ s$. In particular, if $z = N_W^{-1}(y)$, for some $y \in \mathbb{S}^2$, then

$$\begin{aligned} s(N_W(z)) &= s(N_W(N_W^{-1}(y))) = s(y); \quad \text{and} \\ N_W(s(z)) &= N_W(s(N_W^{-1}(y))) = s(N_W(N_W^{-1}(y))) = s(y), \end{aligned}$$

which also proves that $s \circ N_W = N_W \circ s$.

Finally, the relation between the anisotropic Gauss maps of Σ and $s(\Sigma)$ is given by

$$\tilde{\nu} \circ s := N_W^{-1} \circ \tilde{N} \circ s = N_W^{-1} \circ s \circ N = s \circ N_W^{-1} \circ N := s \circ \nu.$$

Thus,

$$\begin{aligned} -d\tilde{\nu}_{s(p)} \cdot ds_p &= -d(\tilde{\nu} \circ s)_p = -d(s \circ \nu)_p = ds_{\nu(p)} \cdot (-d\nu_p) \\ &\Rightarrow -d\tilde{\nu}_{s(p)} = ds_{\nu(p)} \cdot (-d\nu_p) \cdot (ds_p)^{-1} = s \circ (-d\nu_p) \circ s^{-1}. \end{aligned}$$

In particular, $\operatorname{trace}(-d\tilde{\nu}_{s(p)}) = \operatorname{trace}(-d\nu_p)$ and $\det(-d\tilde{\nu}_{s(p)}) = \det(-d\nu_p)$. $\square$

As a particular consequence of Proposition 4.4.3, if Σ has constant anisotropic mean curvature Λ , then $s(\Sigma)$ also has constant anisotropic mean curvature Λ , and we can apply the Alexandrov's Reflection Method. Thus, we can now state our Height Estimates for compact CAMC surfaces with planar boundary.

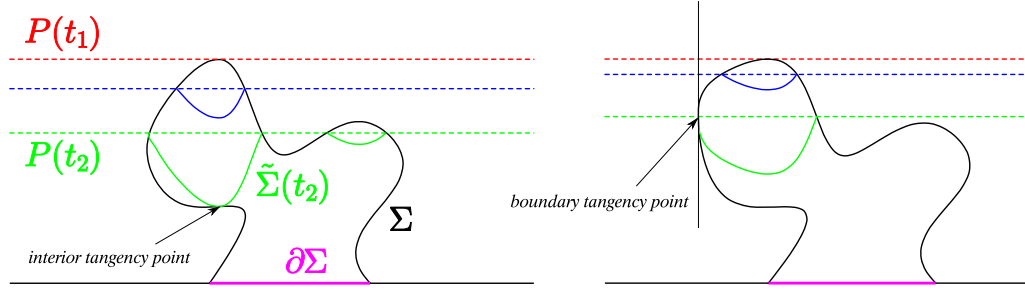
Theorem 4.4.4. Suppose that the anisotropy function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is invariant under the reflection of $\mathbb{S}^2$ that fixes the geodesic $\mathbb{S}^2 \cap \{v\}^\perp$, for some $v \in \mathbb{S}^2$. Let Σ be any compact Λ -CAMC surface ($\Lambda \neq 0$), that is embedded in $\mathbb{R}^3$ and whose boundary is contained in the plane $\{v\}^\perp$. If $C = C(\Lambda)$ is given as in Theorem 4.4.1, then the height of any point $p \in \Sigma$ relative to $\{v\}^\perp$ is at most $2C$.

Proof. The proof is an application of the Alexandrov Reflection Method, based on the classical one due by W. Meeks in [78]. For simplicity, we consider $v = e_3$. Let $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ be the foliation of $\mathbb{R}^3$ by horizontal planes, being $P(t)$ the image of $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ after a translation by the vector te_3 . We define $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap \{z \geq t\}$ and $\tilde{\Sigma}(t)$ the image of $\Sigma^+(t)$ under the reflection of $\mathbb{R}^3$ that fixes $P(t)$.

By contradiction, we suppose that there is a point $p \in \Sigma$ such that its height with respect to $P(0)$ is greater than $2C$. Since Σ is compact, for $t > 0$ sufficiently large, $P(t) \cap \Sigma = \emptyset$. There is a first value $t_1 > 2C$ in which $P(t_1)$ meets Σ . For values of t sufficiently close to t_1 , we have that

- (i) $\Sigma^+(t)$ is a graph over $P(t)$;
- (ii) $\tilde{\Sigma}(t)$ lies inside the open region bounded by Σ and $P(0)$.

Now we decrease t until we reach a first value $t_2 < t_1$ when items (i) and (ii) fail to occur simultaneously. By Theorem 4.4.1, item (i) certainly fails when $t < t_1 - C$, whence we conclude that $t_2 \geq t_1 - C > C$ and that $\tilde{\Sigma}(t_2)$ does not intersect $\partial\Sigma$. Thus, $\tilde{\Sigma}(t_2)$ and Σ have an interior contact point or there exists some point on $\Sigma \cap P(t_2)$ whose tangent plane is vertical, which means that $\tilde{\Sigma}(t_2)$ and Σ have a boundary tangent point (see 4.13). In both cases the normal vectors of $\tilde{\Sigma}(t_2)$ and Σ coincide at the contact point, and by the Maximum Principle we conclude that $\Sigma = \Sigma(t_2) \cup \tilde{\Sigma}(t_2)$, that is, Σ is a compact surface with no boundary. $\square$

Figure 4.13: Two possible scenarios when $t = t_2$.

Another consequence of the Height Estimates for CAMC graphs is the following theorem.

Theorem 4.4.5. Let Σ be any compact Λ -CAMC ($\Lambda \neq 0$) surface, that is embedded in $\mathbb{R}^3$ and whose boundary is contained in the plane $\{v\}^\perp$, for some $v \in \mathbb{S}^2$. Consider three linearly independent vectors $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ and suppose that the anisotropy function $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is invariant under the reflections in $\mathbb{S}^2$ that fix the geodesics $\mathbb{S}^2 \cap \{v_i\}^\perp$, for $i \in \{1, 2, 3\}$. Let d denote the diameter of $\partial\Sigma$. Then there exists a constant $C = C(\Lambda, d)$ such that the distance of any point $p \in \Sigma$ relative to $\{v\}^\perp$ is at most C .

Proof. For simplicity, we assume that $v = e_3$. Also, we suppose that e_3 is not parallel to v_i , for $i \in \{v_1, v_2, v_3\}$, otherwise the conclusion follows directly from Theorem 4.4.1. Let R be the radius of a circle in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ centered at the origin O which contains $\partial\Sigma$. For example, after a translation of Σ we can take $R = \frac{\sqrt{3}d}{2}$.

For each $i \in \{1, 2, 3\}$ we consider P_i and Q_i the two supporting planes of $B(O, R)$, both perpendicular to the vector v_i , with P_i lying at v_i . Let P_i^+ and Q_i^+ the half-spaces defined by P_i and Q_i which are disjoint of $B(O, R)$, respectively. By Theorem 4.4.1, there is a constant C' , depending only on Λ , such that the heights of $\Sigma \cap P_i^+$ with respect to P_i and $\Sigma \cap Q_i^+$ with respect to Q_i is smaller than C' , for $i \in \{1, 2, 3\}$. Notice that these height estimates do not depend on the diameters of $\Sigma \cap P_i$ and $\Sigma \cap Q_i$.

Put $\tilde{P}_i = P_i + C'v_i$ and $\tilde{Q}_i = Q_i - C'v_i$. If S_i denotes the slab between $\tilde{P}_i$ and $\tilde{Q}_i$, for $i = \{1, 2, 3\}$, since $\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly independent, we conclude that $\mathcal{P} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ is a bounded open region of $\mathbb{R}^3$ containing $B(O, R)$. Moreover, $\mathcal{P}$ is contained in a open ball $B(O, C)$, whose radius C depends on R (which in turn depends on d) and C' , finishing the proof. $\square$

4.5 Properly embedded CAMC surfaces

We say that a Riemannian surface Σ has **finite topology** if there is a compact surface without boundary K and a finite quantity of points $p_1, \dots, p_n \in K$ such that Σ is diffeomorphic to $K - \{p_1, \dots, p_n\}$. In this case, for each $i \in \{1, \dots, n\}$ there is a neighborhood D_i of p_i in K where D_i has the same topology of the closed disk $\overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2$ and such that $D_i \cap D_j = \emptyset$ for $i \neq j$. Identifying Σ with $K - \{p_1, \dots, p_n\}$, each subset $A_i = D_i - \{p_i\}$ is called an **end** of Σ . Notice that each A_i has the same topology of the annulus $\mathbb{S}^1 \times [0, 1)$.

Remark 4.5.1. If Σ has finite topology and is properly embedded in $\mathbb{R}^3$ then its ends do not intercept and diverge to the infinity.

The following auxiliary result concerns the geometry of the annular ends of a properly embedded surface with constant anisotropic mean curvature. Its isotropic version was first proved by W. Meeks in [78]. Later, a simpler proof appeared in [67], whose ideas involved there are also applicable in the anisotropic case, with the Wulff shape playing the role of the round sphere. By this reason we omit the proof.

Lemma 4.5.2 (Separation Lemma). Let $A \subset \mathbb{R}^3$ be a properly embedded annulus (i.e., A is diffeomorphic to $\mathbb{S}^1 \times [0, 1)$) with constant anisotropic mean curvature $\Lambda \neq 0$ and let P_1 and P_2 two parallel planes in $\mathbb{R}^3$. Denote by P_1^+ (resp. P_2^+) the half-space of $\mathbb{R}^3$ defined by P_1^+ (resp. P_2^+) which does not contain P_2 (resp. P_1). If the distance between P_1 and P_2 is greater than $\frac{2\sqrt{3}d}{|\Lambda|}$, where d denotes the diameter of the Wulff shape, then all the connected components of $\Sigma \cap P_1^+$ or $\Sigma \cap P_2^+$ are compact.

Putting together the height estimates for compact CAMC surfaces given in Corollary 4.4.4 and Lemma 4.5.2 we can infer an important theorem about properly embedded CAMC surfaces with at most one end and an additional hypothesis under the anisotropy function:

Theorem 4.5.3. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a properly embedded Λ -CAMC ($\Lambda \neq 0$) surface with finite topology and at most one end. Consider three linearly independent vectors $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ and suppose in addition that the anisotropy function F is invariant under the reflections in $\mathbb{S}^2$ which fix the geodesics $\mathbb{S}^2 \cap \{v_i\}^\perp$, for $i \in \{1, 2, 3\}$. Then, up to a homothety, Σ is the Wulff shape.

Proof. The idea of this proof is to show that Σ is contained in a slab defined by two parallel planes orthogonal to v_1 . This conclusion applied also for v_2 and v_3 permit us to deduce that Σ is contained in a bounded region defined as the intersection of three slabs provided by v_1, v_2 and v_3 . Thus, from the hypothesis that Σ is properly immersed, we conclude it is a compact CAMC surface, and since it is also embedded, Theorem 3.2.6 implies that Σ is the Wulff shape, up to a homothety.

Let P_1 and P_2 be two parallel planes orthogonal to v_1 , whose distance is greater than $D := \frac{2\sqrt{3}d}{|\Lambda|}$, where d is the diameter of the Wulff shape. We can suppose, without loss of generality that both P_1 and P_2 intersect Σ , otherwise we can translate P_1 and P_2 along v_1 preserving their distance in such a way that either Σ is contained in the slab defined by P_1 and P_2 , that is our desired scenario, or both P_1 and P_2 intersect Σ . Consider also a new coordinate system (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$ where v_1 spans the z -axis and $P_1 = \{z = D\}$ and $P_2 = \{z = -D\}$. Since Σ is a properly embedded surface with at most one end, we can decompose $\Sigma = \Sigma_0 \cup A$, where Σ_0 is an embedded compact surface with boundary and A is a properly embedded annulus. In particular, A satisfy the hypothesis of Lemma 4.5.2, and we can deduce that all the connected components of $\Sigma \cap \{z \geq D\}$ or $\{z \leq -D\}$ are compact. Without loss of generality, we can suppose that $\Sigma \cap \{z \geq D\}$ has this property. Thus, each connected component of $\Sigma \cap \{z \geq D\}$ is a Λ -CAMC surface with planar boundary, whence we deduce that $\Sigma \subset \{z \leq D + C\}$, where C is the uniform height bound given in Corollary 4.4.4.

Now consider the planes $\{z = D - 2C\}$ and $\{z = -D - 2C\}$. By applying Lemma 4.5.2 for these planes, we conclude that all the connected components of $\Sigma \cap \{z \geq D - 2C\}$ or $\Sigma \cap \{z \leq -D - 2C\}$ are compact. If $\Sigma \cap \{z \geq D - 2C\}$ would have this property, the same arguments of the last paragraph permit us to deduce that $\Sigma \subset \{z \geq D - 2C + C = D - C\}$, contradicting our assumption that Σ intersects the plane $\{z = D\}$. Thus we deduce that the connected components of $\Sigma \cap \{z \leq -D - 2C\}$ are compact and using Corollary 4.4.4

again, we conclude that $\Sigma \subset \{z \geq -D - 3C\}$. Therefore, Σ is contained in the slab $\{-D - 3C \leq z \leq D + C\}$, finishing the proof. $\square$

Appendix A

The Maximum Principle

For convenience to the reader, we include this appendix, where we present the details of the main technique we use along the second part of this thesis: the Maximum Principle. The first section is devoted to the interior and boundary versions of the Maximum Principle for second-order elliptic linear operators. In the second section, similar versions of the Maximum Principle for quasi-linear operators are obtained. It is done by reducing to the linear case. Finally, in the third section we present the notions to establish the geometric version of the Maximum Principle, known as the Tangency Principle, that is formulated at the end of this section specifically for anisotropic mean curvatures.

A.1 Linear second-order partial differential operators

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain (i.e. an open and connected subset of $\mathbb{R}^n$). In this section we are concerned on linear second order differential operators $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ of the form:

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x), \quad (\text{A.1.1})$$

where a_{ij} , b_i and c are, for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$, continuous real-valued functions defined on Ω . Here we also suppose that the second order coefficients are symmetric, that is, $a_{ij} = a_{ji}$, for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definition A.1.1. The operator L given in equation (A.1.1) is said to be:

- i. **elliptic** at $x \in \Omega$ if the matrix $[a_{ij}(x)]$ is positive definite. If this condition is valid for all $x \in \Omega$ we say just that L is elliptic;
- ii. **uniformly elliptic** if the eigenvalues of $[a_{ij}(x)]$ are bounded below and above by a positive constant;
- iii. **locally uniformly elliptic** if for each $x \in \Omega$ there exists a neighborhood U of x so that L is uniformly elliptic.

More precisely, if $\{\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)\}$ are the eigenvalues of $[a_{ij}(x)]$ and

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \min\{\lambda_i(x); 1 \leq i \leq n\}, \\ \Lambda(x) &= \max\{\lambda_i(x); 1 \leq i \leq n\}, \end{aligned}$$

then L is elliptic at $x \in \Omega$ if and only if

$$0 < \lambda(x) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (\text{A.1.2})$$

for every $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. In the sense of equation (A.1.2), L is uniformly elliptic if and only if $0 < \lambda \leq \lambda(x) \leq \Lambda(x) \leq \Lambda$ for some positive numbers λ and Λ . Thus, L is locally uniformly elliptic if for any $x_0 \in \Omega$ there exist a neighborhood $U \subset \Omega$ of x_0 and positive constants $\lambda(x_0)$ and $\Lambda(x_0)$ such that

$$\lambda(x_0)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x_0)|\xi|^2, \quad \forall x \in U, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The simplest linear second-order elliptic operators we must bear in mind is the Laplacian Operator $\Delta : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$. It is given by:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \quad (\text{A.1.3})$$

It is easy to check that the Laplacian Operator is uniformly elliptic on $\mathbb{R}^n$. When $n = 2$, from the Theory of holomorphic functions it is known that a sub-solution of the Laplacian does not have a local maximum in the interior of its domain. This phenomenon also happens for any elliptic second-order linear differential operator as we can see in the next theorem.

Theorem A.1.2. (Interior Maximum Principle) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain and let $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ be an elliptic second-order linear differential operator, as in equation (A.1.1), with $c \leq 0$. Let $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfying $Lu > 0$ on Ω .

- i. If $c \equiv 0$, u does not have a maximum in Ω ;
- ii. If $c \leq 0$, u does not have a non-negative local maximum in Ω .

Proof. Let $x_0 \in \Omega$ be an interior local maximum of u . Then the Hessian matrix of u at x_0 , $\text{Hess } u(x_0)$, is negative semi-definite. Consider $A(x_0) = [a_{ij}(x_0)]$ the matrix of the second-order coefficients of L , evaluated at x_0 . In particular, $A(x_0)$ is symmetric and positive-definite, since we are assuming that L is elliptic. Thus, there exists an orthogonal matrix P that diagonalizes $A(x_0)$, that is,

$$PA(x_0)P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

for some $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Using that $\partial_i u(x_0) = 0$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$, a direct computation gives

$$\text{trace}(A(x_0) \text{Hess } u(x_0)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = Lu(x_0) - c(x_0)u(x_0).$$

Either item [i] or item [ii] being satisfied, in both cases we conclude that $\text{trace}(A(x_0) \text{Hess } u(x_0)) > 0$, since $Lu > 0$ on Ω .

On the other hand, since the trace is invariant for similar matrices, we have

$$\begin{aligned} \text{trace}(A(x_0) \text{Hess } u(x_0)) &= \text{trace}(PA(x_0) \text{Hess } u(x_0)P^{-1}) \\ &= \text{trace}(PA(x_0)P^{-1}P \text{Hess } u(x_0)P^{-1}) \\ &= \text{trace}(PA(x_0)P^{-1}C) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_{ii}, \end{aligned}$$

where $C := P \text{Hess } u(x_0) P^{-1} = [c_{ij}]$. Since $\text{Hess } u(x_0)$ is negative semi-definite and P is orthogonal, we conclude that C is also negative-semi definite. Thus, for the canonical basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ we have $c_{ii} = \langle Ce_i, e_i \rangle \leq 0$, for all $i \in \{1, \dots, n\}$. Therefore

$$\text{trace}(A(x_0) \text{Hess } u(x_0)) \leq 0,$$

which is a contradiction. $\square$

Theorem A.1.3. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain and let $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ be a locally uniformly elliptic second-order linear differential operator, as in equation (A.1.1). Let $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfying $Lu \geq 0$ on Ω .

- i. If $c \equiv 0$ and u has a local maximum at $x_0 \in \Omega$, then u is constant in a neighborhood of x_0 ;
- ii. If $c \leq 0$ and u has a non-negative local maximum at $x_0 \in \Omega$, then u is constant in a neighborhood of x_0 .

Proof. Let x_0 in Ω an interior local maximum of u . Since L is locally uniformly elliptic, there exists $r > 0$ and positive numbers $\lambda(x_0)$ and $\Lambda(x_0)$ such that

$$u(x) \leq u(x_0)$$

and

$$\lambda(x_0)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x_0)|\xi|^2,$$

for all $x \in B(x_0, r)$ and for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. Here $B(x_0, r)$ denotes the Euclidean ball centered at x_0 of radius r .

Let us suppose, by contradiction, that u is non-constant in any neighborhood of x_0 . This means that:

- $\exists y \in B(x_0, r/2)$ such that $u(y) < u(x_0)$, and
- $\exists \delta_0 > 0$ such that $\overline{B(y, \delta_0)} \subset B(x_0, r)$ and $x_0 \in \partial B(y, \delta_0)$.

Set $U(x_0) = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\}$ and define

$$\delta := \inf\{\rho > 0; \overline{B(y, \rho)} \subset B(x_0, r) \text{ and } \partial B(y, \rho) \cap U(x_0) \neq \emptyset\}.$$

Claim: $0 < \delta \leq \delta_0$. Indeed, since $u(y) < u(x_0)$, by continuity there exists $0 < \tilde{\delta} < \delta_0$ such that $u(x) < u(x_0)$, for all $x \in \overline{B(y, \tilde{\delta})}$. Since $B(y, \delta_0) \subset B(x_0, r)$ we can enlarge $\tilde{\delta}$ until $\overline{B(y, \tilde{\delta})}$ reach a first point $x' \in \partial B(y, \tilde{\delta})$ such that $u(x') = u(x_0)$. It necessarily occurs for some $0 < \tilde{\delta} \leq \delta_0$ since $x_0 \in B(y, \delta_0)$.

Conclusion: from the definition of δ , $u(x) < u(x_0)$ for all $x \in B(y, \delta)$ and there exists $x' \in \partial B(y, \delta)$ with $u(x') = u(x_0)$.

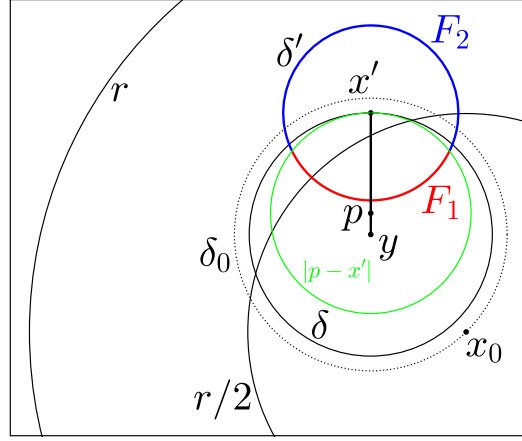


Figure A.14: Auxilliary illustration for the proof of Theorem A.1.3.

Take $0 < \delta' < \delta$ so that $\overline{B(x', \delta')} \subset B(x_0, r)$ and a point $p \in [y, x'] = \{sy + (1-s)x'; s \in [0, 1]\}$ so that $|p - x'| > \delta'$ (see Fig. A.14). In particular, $u(x) \leq u(x_0)$, for all $x \in B(x', \delta')$.

Let K be a constant to be determined and define

$$v(x) = e^{-K|x-p|^2} - e^{-K|x'-p|^2}, \quad x \in \overline{B(x', \delta')}. \quad (\text{A.1.4})$$

Then, we compute Lv to obtain

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-K|x-p|^2} \left(4K^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - p_i)(x_j - p_j) - 2K \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \right) \\ &\quad - 2Ke^{-K|x-p|^2} \sum_{i=1}^n b_i(x)(x_i - p_i) + c(x)v(x) \\ &= 4K^2 e^{-K|x-p|^2} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - p_i)(x_j - p_j) \right) \\ &\quad - 2Ke^{-K|x-p|^2} \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)(x_i - p_i) \right) \\ &\quad + e^{-K|x-p|^2} \left(c(x) - c(x)e^{K(|x-p|^2 - |x'-p|^2)} \right) \\ &= e^{-K|x-p|^2} (4K^2 M(x) - 2KN(x) + P(x)), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} M(x) &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - p_i)(x_j - p_j); \\ N(x) &:= \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)(x_i - p_i); \\ P(x) &:= c(x) - c(x)e^{K(|x-p|^2 - |x'-p|^2)}. \end{aligned}$$

Since $\overline{B(x', \delta')}$ is compact and M, N and P are continuous, we can find constants $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{P} \in \mathbb{R}$, independent of K , such that, for every $x \in B(x', \delta')$, $M(x) \geq \tilde{M}$, $N(x) \leq \tilde{N}$ and $P(x) \geq \tilde{P}$, where $\tilde{M} > 0$ since L is uniformly elliptic on $B(x', \delta')$. Therefore,

$$Lv(x) \geq e^{-K|x-p|^2} (4K^2 \tilde{M} - 2K \tilde{N} + \tilde{P}), \quad \forall x \in \overline{B(x', \delta')},$$

Note that $P(x)$ is bounded below by a constant independent of K , given by

$$c_1 := \min\{c(x); x \in \overline{B(x', \delta')}\}.$$

Thus, if $c \equiv 0$ in equation (A.1.1), we can take $\tilde{P} \equiv 0$.

So, since $\tilde{M} > 0$, we can find $K > 0$ such that $4K^2\tilde{M} - 2K\tilde{N} + \tilde{P} > 0$ and thus

$$Lv(x) > 0, \text{ for all } x \in \overline{B(x', \delta')}.$$

Now, for all $t > 0$ we have

$$L(u + tv) = Lu + tLv \geq tLv > 0 \text{ in } B(x', \delta'),$$

since $Lu \geq 0$ on Ω .

Let $\partial B(x', \delta') = F_1 \cup F_2$, where $F_1 = \partial B(x', \delta') \cap \overline{B(p, |x' - p|)}$ and $F_2 = \partial B(x', \delta') - F_1$ (see Fig. A.14). Note that

- a. if $x \in F_2$, then $|x - p| > |x' - p|$ and so $v(x) < 0$;
- b. if $x \in F_1$, then $u(x) < u(x_0)$.

Putting together items a and b and the fact that F_1 is compact, we can find $t > 0$ such that

$$u(x) + tv(x) < u(x_0), \quad \text{for all } x \in \partial B(x', \delta'). \quad (\text{A.1.5})$$

Let $z \in \overline{B(x', \delta')}$ the maximum of $u + tv$ on $\overline{B(x', \delta')}$, that is

$$u(z) + tv(z) \geq u(x) + tv(x) \text{ for all } x \in \overline{B(x', \delta')}.$$

Since $u(z) + tv(z) \geq u(x') + tv(x') = u(x') = u(x_0)$, we conclude from (A.1.5) that $z \in B(x', \delta')$ and it is a maximum (non-negative maximum, if $c \leq 0$) of $u + tv$ on $\overline{B(x', \delta')}$.

Applying Theorem A.1.2 for $u + tv$ in $B(x', \delta')$, we get a contradiction. Thus, there exists $r > 0$ such that $u(x) = u(x_0)$ for all $x \in B(x_0, r)$. $\square$

Corollary A.1.4. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain and let $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ be a locally uniformly elliptic second-order linear differential operator, as in equation (A.1.1). Assume that $Lu \geq 0$ and $u \leq 0$ on Ω . Let $x_0 \in \Omega$ be a point such that $u(x_0) = 0$. Then $u \equiv 0$ on $\overline{\Omega}$.

Proof. Consider the following set

$$U = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}.$$

By the continuity of u , U is a closed subset of Ω . Moreover, $U \neq \emptyset$, since $x_0 \in U$. If we can prove that U is also an open subset of Ω we conclude that $U = \Omega$, and by continuity, $u \equiv 0$ on $\overline{\Omega}$. For this purpose, consider $L_0 : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ given by $L_0 = L + (q - c)Id$, where $q(x) = \min\{c(x), 0\}$. That is,

$$L_0 v(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + q(x)v(x).$$

Then L_0 is also a locally uniformly elliptic second-order linear differential operator and since $q - c \leq 0$ on Ω , we have that

$$L_0 u = Lu + (q - c)u \geq 0 \quad \text{on } \Omega$$

Thus, if $y \in U$, then y is a local maximum of u and applying Theorem A.1.3 we conclude that there exists $\epsilon > 0$ such that $u \equiv u(y) = u(x_0)$ on $B(y, \epsilon)$. Therefore U is open. $\square$

Remark A.1.5. Using the arguments of the proof of Corollary A.1.4 we can show that in Theorem A.1.3, the neighborhood of x_0 where u is constant coincides with the connected component of the neighborhood where x_0 is a local maximum of u . This remark will be useful later.

Theorem A.1.6. (Boundary Maximum Principle) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain such that $\partial\Omega$ is smooth and let $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ be a locally uniformly elliptic second-order linear differential operator, as in equation (A.1.1). Let $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfying $Lu \geq 0$ on Ω . Let $x_0 \in \partial\Omega$ so that

- u is C^1 at x_0 ;
- $u(x_0) \geq u(x)$ for all $x \in \Omega \cap B(x_0, \epsilon)$, for some $\epsilon > 0$;
- $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, where η is the inward normal to $\partial\Omega$.

Then,

- i. If $c \equiv 0$, u is constant in a neighborhood of x_0 ;
- ii. If $c \leq 0$ and $u(x_0) \geq 0$, u is constant in a neighborhood of x_0 .

Proof. Let us assume, by contradiction, that u is non-constant in any neighborhood of x_0 . Since $\partial\Omega$ is smooth, there exists $\rho > 0$ and $x' \in \Omega$ such that $B(x', \rho) \subset \Omega$ and $\partial B(x', \rho) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$.

Let $0 < \rho' < \min\{\rho, \epsilon\}$ be such that $u(x) \leq u(x_0)$ for all $x \in B(x_0, \rho') \cap (\Omega \cup \{x_0\})$. Consider the compact set

$$K := \{x \in \Omega; |x - x_0| \leq \rho', |x - x'| \leq \rho\} = \overline{B(x_0, \rho')} \cap \overline{B(x', \rho)}$$

and define

$$v(x) = e^{-\delta|x-x'|^2} - e^{-\delta|x-x_0|^2}, \quad x \in K,$$

where δ is a constant to be determined.

In the same way we did in the proof of Theorem A.1.3, we can find $\delta > 0$ such that

$$Lv(x) > 0, \quad \text{for all } x \in K.$$

Take $0 < \tilde{\rho} < \rho'$ so that $B(x_0, \tilde{\rho}) \cap B(x', \tilde{\rho}) = \emptyset$ and consider

$$\tilde{K} = \{x \in \Omega; |x - x_0| \leq \tilde{\rho}, |x - x'| \leq \rho\} = \overline{B(x_0, \tilde{\rho})} \cap \overline{B(x', \rho)}$$

and write $\partial\tilde{K} = F_1 \cup F_2$, where $F_1 = \overline{\partial\tilde{K} \cap B(x', \rho)}$ and $F_2 = \partial\tilde{K} - F_1$ (see Fig. A.15). Therefore, we have

- i. If $x \in F_2$, $|x - x'| = \rho = |x_0 - x'|$. Therefore $v(x) = 0$.
- ii. If $x \in F_1$, then $u(x) < u(x_0)$. Indeed, let us suppose that $u(x) = u(x_0)$ for some $x \in F_1$. Since $F_1 \subset B(x_0, \epsilon) \cap \Omega$ and, by hypothesis, $u(y) \leq u(x_0)$ for all $y \in B(x_0, \epsilon) \cap \Omega$, we conclude that x would be a maximum for u restricted to $B(x_0, \epsilon) \cap \Omega$. Then, applying Theorem A.1.3 with Remark A.1.5, $u \equiv u(x_0)$ is constant in $B(x_0, \epsilon) \cap \Omega$, which contradicts our assumption that u is non-constant on any neighborhood of x_0 .

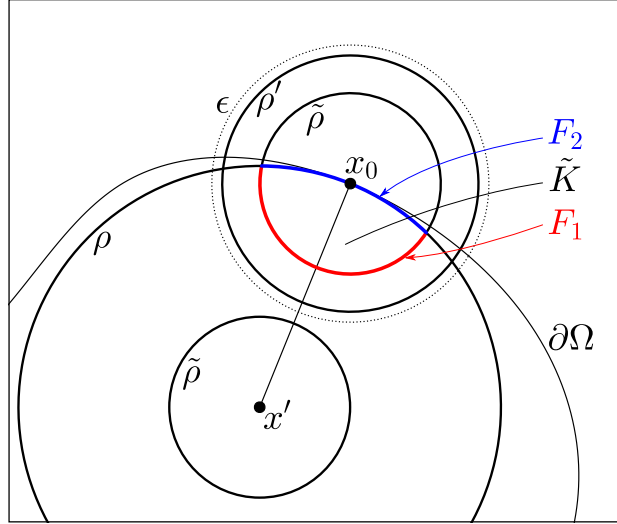


Figure A.15: Auxilliary illustration for the proof of Theorem A.1.6.

Thus, since F_1 is compact, from item ii we can choose $t > 0$ such that

$$u(x) + tv(x) \leq u(x_0), \quad \text{for all } x \in F_1.$$

Putting this information together with item i, we conclude that

$$u(x) + tv(x) \leq u(x_0), \quad \text{for all } x \in \partial \tilde{K}.$$

Define $\xi(x) = u(x) + tv(x) - u(x_0)$, for $x \in \tilde{K}$. We have that

$$L\xi = Lu + tLv - cu(x_0) > 0,$$

since $Lu \geq 0$ on K by hypothesis and we know that $Lv > 0$ on K . We have also that $\xi \leq 0$ on $\partial \tilde{K}$ and $\xi(x_0) = 0$. Thus, applying Theorem A.1.2 we conclude that

$$\xi(x) \leq 0, \quad \text{for all } x \in \tilde{K}.$$

Using this information and the fact that $s \mapsto \xi(x_0 + s\eta)$ has a right derivative at $s = 0$ (because u is C^1 at x_0), we conclude that $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}(x_0) \leq 0$. Thus,

$$t \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial \xi}{\partial \eta}(x_0) - \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \leq 0,$$

since $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, by hypothesis. On the other hand, computing $t \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0)$ we get:

$$t \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -2t\delta \langle \eta, x_0 - x' \rangle e^{-\delta|x_0 - x'|^2} > 0,$$

since $x_0 - x'$ is orthogonal to $\partial \Omega$ at x_0 pointing outward. Thus we get a contradiction. $\square$

Corollary A.1.7. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain such that $\partial \Omega$ is smooth and let $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ be a locally uniformly elliptic second-order linear differential operator, as in equation (A.1.1). Assume that $Lu \geq 0$ and $u \leq 0$ on Ω . Let $x_0 \in \partial \Omega$ be a point such that $u(x_0) = 0$. Assume also that u is C^1 at x_0 and $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, where η is the normal vector of $\partial \Omega$ pointing inward. Then $u \equiv 0$ on $\bar{\Omega}$.

Proof. Consider $U = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$. The same arguments of the proof of Corollary A.1.4 shows that U is an open and closed subset of Ω . We need only guarantee that $U \neq \emptyset$. Let L_0 be as in the proof of Corollary A.1.4. Applying Theorem A.1.6 to L_0 we conclude that there exists $\epsilon > 0$ such that u is constant and equals to $u(x_0)$ on $B(x_0, \epsilon) \cap \Omega$. This implies that $U \neq \emptyset$, since $u(x_0) = 0$ and x_0 is a boundary point of Ω . $\square$

A.2 Quasilinear second-order partial differential operators

Now we consider quasilinear second order differential operators, that is, differential operators that are linear on the second order terms. Our objective is to extend the Maximum Principles of the previous section to this kind of differential operator.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain and consider the quasilinear second order differential operator $Q : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ of the form:

$$Qu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + b(x, u, \nabla u), \quad (\text{A.2.1})$$

where a_{ij} , b are, for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$, continuous real-valued functions defined on $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Here ∇u denotes the gradient of u , that is, $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, and we suppose again that the second order coefficients are symmetric, that is, $a_{ij} = a_{ji}$, for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definition A.2.1. The operator Q given in A.2.1 is said to be:

- i. **elliptic** at $(x, p, q) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ if the matrix $[a_{ij}(x, p, q)]$ is positive definite. If this condition is valid for all $(x, p, q) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ we say just that Q is elliptic;
- ii. **uniformly elliptic** if the eigenvalues of $[a_{ij}(x, p, q)]$ are bounded below and above by a positive constant;
- iii. **locally uniformly elliptic** if for each $(x, p, q) \in \Omega$ there exists a neighborhood U of (x, p, q) so that L is uniformly elliptic.

In other words, if $\{\lambda_1(x, p, q), \dots, \lambda_n(x, p, q)\}$ are the eigenvalues of $[a_{ij}(x, p, q)]$ and

$$\begin{aligned} \lambda(x, p, q) &= \min \lambda_i(x, p, q); 1 \leq i \leq n, \\ \Lambda(x, p, q) &= \max \lambda_i(x, p, q); 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

then Q is elliptic if and only if

$$0 < \lambda(x, p, q) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, p, q) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x, p, q) \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (\text{A.2.2})$$

for every $(x, p, q) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ and for every $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. In the sense of equation (A.2.2), Q is uniformly elliptic if and only if $0 < \lambda \leq \lambda(x, p, q) \leq \Lambda(x, p, q) \leq \Lambda$ for some positive numbers λ and Λ . Thus, L is locally uniformly elliptic if for any $(x_0, p_0, q_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ there exist a neighborhood U of (x_0, p_0, q_0) and positive constants $\lambda(x_0, p_0, q_0)$ and $\Lambda(x_0, p_0, q_0)$ such that

$$\lambda(x_0, p_0, q_0) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, p, q) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x_0, p_0, q_0) |\xi|^2, \quad \forall (x, p, q) \in U, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Lemma A.2.2. (Hadamard Lemma) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be a convex domain and let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^1 function. Then

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n h_i(x, y)(x_i - y_i)$$

where $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ and

$$h_i(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx + (1-s)y) ds,$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$ and for all $x, y \in U$.

Proof. Given $x, y \in U$, consider the function $g : [0, 1] \rightarrow U$ given by $g(s) = f(sx + (1-s)y)$. Since U is convex, g is well defined. Using the Chain's Rule and the Fundamental Theorem of Calculus, we have

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx + (1-s)y)(x_i - y_i) ds \\ &= \sum_{i=1}^n h_i(x, y)(x_i - y_i). \end{aligned}$$

□

Lemma A.2.3. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain and let $u^k : C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2$ be two functions that satisfies $Qu^2 \geq Qu^1$ on $\overline{\Omega}$, where Q is an second-order quasi-linear differential operator given as in equation (A.2.1).

Then $u := u^2 - u^1$ satisfies an elliptic linear equation $Lu \geq 0$, where L is an elliptic second-order linear differential operator. Moreover, if Q is locally uniformly elliptic, then L is also locally uniformly elliptic

Proof. Define $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\phi(x, z, p, q) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, z, p) q_{ij} + b(x, z, p),$$

where $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_{11}, \dots, q_{1n}, \dots, q_{n1}, \dots, q_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ and $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$.

Since $Q(u^2) \geq Q(u^1)$, we have

$$\phi(x, u^2(x), p^2(x), q^2(x)) - \phi(x, u^1(x), p^1(x), q^1(x)) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (\text{A.2.3})$$

where

$$\begin{aligned} q^k(x) &= (\partial_{11}^2 u^k(x), \dots, \partial_{1n}^2 u^k(x), \dots, \partial_{n1}^2 u^k(x), \dots, \partial_{nn}^2 u^k(x)), \quad \text{and} \\ p^k(x) &= (\partial_1 u^k(x), \dots, \partial_n u^k(x)), \quad \text{for } k = 1, 2. \end{aligned}$$

Using Hadamard Lemma, we can rewrite inequality (A.2.3) as

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)(\partial_{ij}^2 u^2(x) - \partial_{ij}^2 u^1(x)) + \sum_{i=1}^n B_i(x)(\partial_i u^2(x) - \partial_i u^1(x)) \quad (\text{A.2.4})$$

$$+ C(x)(u^2(x) - u^1(x)) \geq 0, \quad (\text{A.2.5})$$

for all $x \in \Omega$, where

$$\begin{aligned} A_{ij}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial q_{ij}}(x, su^2(x) + (1-s)u^1(x), s \operatorname{grad} u^2(x) + (1-s) \operatorname{grad} u^1(x)) ds; \\ &= \int_0^1 a_{ij}(x, su^2(x) + (1-s)u^1(x), s \operatorname{grad} u^2(x) + (1-s) \operatorname{grad} u^1(x)) ds; \\ B_i(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial p_i}(x, su^2(x) + (1-s)u^1(x), s \operatorname{grad} u^2(x) + (1-s) \operatorname{grad} u^1(x)) ds; \\ C(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, su^2(x) + (1-s)u^1(x), s \operatorname{grad} u^2(x) + (1-s) \operatorname{grad} u^1(x)) ds, \end{aligned}$$

where $\frac{\partial \phi}{\partial q_{ij}}$, $\frac{\partial \phi}{\partial p_i}$ and $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ denotes the partial derivatives of $\phi(x, z, p, q)$ in the directions $(0, 0, 0, e_{ij})$, $(0, 0, e_i, 0)$ and $(0, 1, 0, 0)$, respectively.

Defining $L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ by

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \partial_i u(x) + C(x)u(x) = 0,$$

we get a second-order linear differential operator, and by equation (A.2.5) we conclude that $u := u^2 - u^1$ satisfies $Lu \geq 0$.

Denoting by $\tau(x, s) = (x, su^2(x) + (1-s)u^1(x), s \operatorname{grad} u^2(x) + (1-s) \operatorname{grad} u^1(x))$, since Q is elliptical, we have that

$$\lambda(\tau(x, s))|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\tau(x, s))\xi_i \xi_j \leq \Lambda(\tau(x, s))|\xi|^2.$$

Therefore

$$\int_0^1 \lambda(\tau(x, s)) ds |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 a_{ij}(\tau(x, s)) ds \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \sum_{i,j=1}^n \Lambda(\tau(x, s)) ds |\xi|^2,$$

and since $\lambda(\tau(x, s))$ and $\Lambda(\tau(x, s))$, we conclude that $\int_0^1 \lambda(\tau(x, s)) ds$ and $\int_0^1 \Lambda(\tau(x, s)) ds$ are also positive, whence we deduce that L is elliptic. From these arguments we also conclude that L is locally uniformly elliptic when Q is locally uniformly elliptic. $\square$

Theorem A.2.4. Let $u^1, u^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ be two functions of class C^2 defined on an open domain Ω of either $\mathbb{R}^n$ or the half-space $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ such that $0 \in \Omega$. Assume also that $Qu^2 \geq Qu^1$, where Q is a locally uniformly elliptic second-order quasi-linear differential operator given as in equation (A.2.1). Then,

- i. if 0 is an interior point at Ω , $u^2(0) = u^1(0)$ and $u^2 \leq u^1$ in Ω , then $u^2 \equiv u^1$ in Ω ;
- ii. if 0 is a boundary point at Ω , $u^2(0) = u^1(0)$, $\frac{\partial u^2}{\partial x_n}(0) = \frac{\partial u^1}{\partial x_n}(0)$ and $u^2 \leq u^1$ in Ω , then $u^2 \equiv u^1$ in Ω .

Proof. Consider $u := u^2 - u^1$. Applying Lemma A.2.3 we conclude that there exists an elliptic second order differential operator L such that $Lu \geq 0$. The conclusion follows from applying Corollary A.1.4 in item [i] and Corollary A.1.7 in item [ii]. $\square$

A.3 The Tangency Principle for anisotropic mean curvatures

In this section we present a geometric interpretation of the Maximum Principle, known as the Geometric Tangency Principle, that is the main tool used along this thesis. We begin showing an explicit form of the anisotropic mean curvature for graphs. After it, we recall the notions of interior tangency point and boundary tangency point between two surfaces. Finally, we present the Geometric Tangency Principle applied for anisotropic mean curvatures.

Let $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth, positive function and consider $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ its homogeneous extension, that is

$$\tilde{F}(x) = |x|F\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^3 - \{0\},$$

and consider $\psi : (u, v) \in \Omega \mapsto (u, v, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ the parametrization of the graph of a function h defined over some domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. We may expand the expression

$$\Lambda(x) = -\operatorname{div}_{\Sigma}((\operatorname{grad}_{\mathbb{S}^n} F) \circ N)(x) + nF(N(x))H(x)$$

in terms of $\tilde{F}$ and h . Thus ψ has anisotropic mean curvature Λ if and only if h satisfies the following PDE:

$$\begin{aligned} \Lambda = & A_0(p, q)\tilde{F}(N) + A_1(p, q)\tilde{F}_x(N) + A_2(p, q)\tilde{F}_y(N) + A_3(p, q)\tilde{F}_z(N) \\ & + A_{11}(p, q)\tilde{F}_{xx}(N) + A_{12}(p, q)\tilde{F}_{xy}(N) + A_{13}(p, q)\tilde{F}_{xz}(N) \\ & + A_{22}(p, q)\tilde{F}_{yy}(N) + A_{23}(p, q)\tilde{F}_{yz}(N) + A_{33}(p, q)\tilde{F}_{zz}(N), \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

where N is the Gauss map of ψ , $p = h_u$, $q = h_v$, $r = h_{uu}$, $s = h_{uv}$, $t = h_{vv}$ and

$$\begin{aligned} A_k(p, q) &:= a_k(p, q)r + 2b_k(p, q)s + c_k(p, q)t \\ A_{kl}(p, q) &:= a_{kl}(p, q)r + 2b_{kl}(p, q)s + c_{kl}(p, q)t \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} a_0(p, q) &= \frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} & b_0(p, q) &= \frac{-pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} & c_0(p, q) &= \frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \\ a_1(p, q) &= \frac{p(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^2} & b_1(p, q) &= \frac{-p^2q}{(1+p^2+q^2)^2} & c_1(p, q) &= \frac{p(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^2} \\ a_2(p, q) &= \frac{q(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^2} & b_2(p, q) &= \frac{-pq^2}{(1+p^2+q^2)^2} & c_2(p, q) &= \frac{q(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^2} \\ a_3(p, q) &= \frac{-(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^2} & b_3(p, q) &= \frac{pq}{(1+p^2+q^2)^2} & c_3(p, q) &= \frac{-(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} a_{11}(p, q) &= \frac{(1+q^2)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{11}(p, q) &= \frac{-pq(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{11}(p, q) &= \frac{p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \\ a_{12}(p, q) &= \frac{-2pq(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{12}(p, q) &= \frac{2p^2q^2+1+p^2+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{12}(p, q) &= \frac{-2pq(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \\ a_{13}(p, q) &= \frac{2p(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{13}(p, q) &= \frac{q(1-p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{13}(p, q) &= \frac{-2pq^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \\ a_{22}(p, q) &= \frac{p^2q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{22}(p, q) &= \frac{-pq(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{22}(p, q) &= \frac{(1+p^2)^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \\ a_{23}(p, q) &= \frac{-2p^2q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{23}(p, q) &= \frac{p(1+p^2-q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{23}(p, q) &= \frac{2q(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \\ a_{33}(p, q) &= \frac{p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & b_{33}(p, q) &= \frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} & c_{33}(p, q) &= \frac{q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

It is important to notice that equation (A.3.1) is a quasi-linear second-order PDE whose coefficients of first and second order are smooth functions that do not depend on h , but only on its first derivatives. Since we are assuming that $D^2F + F \cdot Id$ is positive definite, it is possible to show that such PDE is also elliptic. Thus, we may apply the results of the previous section. For this purpose, we present now the notions of tangency and boundary interior point between two surfaces.

Definition A.3.1. Let Σ_1 and Σ_2 be two immersed surfaces in $\mathbb{R}^3$. Let $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ be an intersection point such that:

- p is an interior point for both Σ_1 and Σ_2 ;
- $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$;
- the unit normal vectors of Σ_1 and Σ_2 at p coincide.

In these conditions, we say that p is an **interior tangent point** of Σ_1 and Σ_2 .

Definition A.3.2. Let Σ_1 and Σ_2 be two surfaces with boundary immersed in $\mathbb{R}^3$. Let $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ be an intersection point such that:

- p is a boundary point for both Σ_1 and Σ_2 , that is, $p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$;
- $T_p\Sigma_1 = T_p\Sigma_2$;
- the unit normal vectors of Σ_1 and Σ_2 at p coincide.
- the interior co-normal vectors of Σ_1 and Σ_2 at p coincide.

In these conditions, we say that p is an **boundary tangent point** of Σ_1 and Σ_2 .

Let Σ be an immersed surface of $\mathbb{R}^3$, with or without boundary, and let $p \in \Sigma$ be one of its points. Denote by $T_p\Sigma$ the tangent plane of Σ at p . In a sufficiently small domain Ω of $T_p\Sigma$ (that contains the origin, if p is an interior point of Σ or such that $p \in \partial\Sigma$, if p is a boundary point of Σ) we can write Σ as the graph of a smooth function $h : \Omega \subset T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. More precisely, if $N(p)$ is a unit vector orthogonal to Σ at p and $\{E_1, E_2\}$ is an orthonormal basis of $T_p\Sigma$, then in a small neighborhood of p , Σ is parametrized in the following form:

$$(x, y) \in \Omega \mapsto xE_1 + yE_2 + h(x, y)N(p), \quad (\text{A.3.2})$$

for some smooth function $h : \Omega \subset T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Now, consider two surfaces Σ_1 and Σ_2 (with or without boundary) immersed in $\mathbb{R}^3$. Assume that $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ is an interior or boundary tangent point, according to Definitions A.3.1 and A.3.2. Since the normal vectors and tangent planes of Σ_1 and Σ_2 coincide at p , we can write both Σ_1 and Σ_2 as a graph of smooth functions $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ defined in the same domain through equation (A.3.2). Thus, we can compare Σ_1 and Σ_2 through the following definition:

Definition A.3.3. We say that Σ_1 is **above** (resp. **below**) Σ_2 around p if $h_1 \geq h_2$ (resp. $h_1 \leq h_2$) in a neighborhood of $(0, 0) \in \Omega$, and we denote this by $\Sigma_2 \leq \Sigma_1$ (resp. $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$).

Theorem A.3.4. Let $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth, positive function that satisfies the convexity condition: $D^2F(x) + F(x)Id$ is positive definite for all $x \in \mathbb{S}^2$. Let Σ_1 and Σ_2 be two immersed surfaces in $\mathbb{R}^3$ and let $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ be either an interior or a boundary tangency point between Σ_1 and Σ_2 . Assume that:

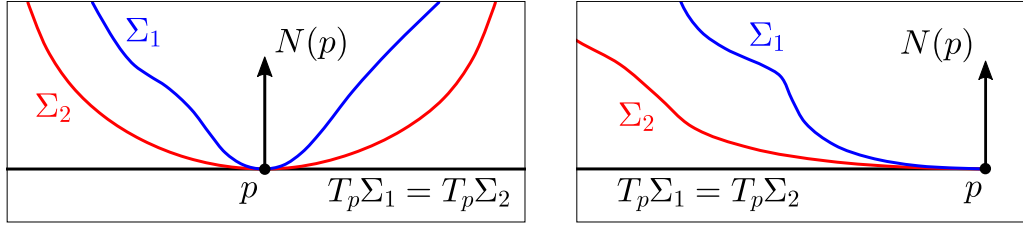


Figure A.16: The interior and boundary versions of the Tangency Principle.

- i. $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ around p ;
- ii. $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ around p .

Then Σ_1 and Σ_2 agree on a neighborhood of p . In particular, $\Lambda_1 = \Lambda_2$ in this neighborhood.

Proof. First of all, we recall that the anisotropic mean curvature operator (that we call Q in this proof) is quasi-linear (see equation (A.3.1)), and since we are assuming that F satisfies the convexity condition, it is also locally uniformly elliptic.

For simplicity we assume that $p = (0, 0, 0)$, the tangent planes of Σ_1 and Σ_2 at p coincide with the plane $\{z = 0\}$, that we identify with $\mathbb{R}^2$, and the normals of Σ_1 and Σ_2 at p coincide with $e_3 = (0, 0, 1)$. For a sufficiently small domain Ω of $\mathbb{R}^2$ that contains the origin if p is an interior tangency point or $0 \in \partial\Omega$ if p is a boundary tangency point, we consider smooth real-valued functions u_1 and u_2 defined on $\overline{\Omega}$ whose graphs coincide around p with Σ_1 and Σ_2 , respectively. The hypothesis implies that $u_2 \leq u_1$ on $\overline{\Omega}$ and also that $Qu_1 \leq Qu_2$. Define $u = u_2 - u_1$. Then $u \leq 0$ on $\overline{\Omega}$ and by Theorem A.2.4 we conclude that there exists an uniformly elliptic second-order linear differential operator L , as in equation (A.1.1), such that $Lw \geq 0$. Moreover, since Q does not depend on u , by the arguments in the proof of Lemma A.2.3 we deduce that $c \equiv 0$ in equation (A.1.1).

We need to consider two cases:

Case 1: p is an interior tangency point between Σ_1 and Σ_2 . In this case the origin is a local maximum of u and applying Corollary A.1.4, we conclude that $u \equiv 0$ on $\overline{\Omega}$, that is, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ around p .

Case 2: p is a boundary tangency point between Σ_1 and Σ_2 . By Definition A.3.2 the normals and interior co-normals of Σ_1 and Σ_2 coincide at p , whence we deduce that

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0) = \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(0) - \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(0) = 0.$$

where η is the inward co-normal vector of $\overline{\Omega}$ at the origin. Since $u(0) = 0$, applying Corollary A.1.7 we conclude again that $u \equiv 0$ on $\overline{\Omega}$. $\square$

A.4 Other theorems

Theorem A.4.1. (Ascoli–Arzelà) Let K be a compact metric space and let $\mathcal{F}$ be a bounded subset of $C^0(K)$. Assume that $\mathcal{F}$ is uniformly equicontinuous, that is,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{such that} \quad d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Then the closure of $\mathcal{F}$ in $C^0(K)$ is compact.

Definition A.4.2. Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open domain. We denote by $C^{k;\alpha}(\overline{U})$, ($0 < \alpha \leq 1$) the space consisting of functions $f \in C^k(\overline{U})$ satisfying $[f]_{k;\alpha;U} < \infty$. This space is indeed a Banach space equipped with the norm

$$\|f\|_{k;\alpha;U} := \|f\|_{k;U} + [f]_{k;\alpha;U}.$$

Theorem A.4.3. (Interior Schauder Estimates for Classical Solutions) For $\alpha \in (0, 1)$, let $u \in C^{2;\alpha}(U)$ be a solution of an second-order linear equation

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x),$$

under the additional assumptions

- i. Ellipticity of L : form some $0 < \lambda \leq \Lambda$,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \text{for all } x \in U \quad \text{and} \quad \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (\text{A.4.1})$$

- ii. $C^{0;\alpha}$ -boundedness of the coefficients: $a_{ij}, b_i, c \in C^{0;\alpha}(\overline{U})$, for some $\alpha \in (0, 1)$ and

$$\frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{0,\alpha,U} + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{0,\alpha,U} + \|c\|_{0,\alpha,U} \right) \leq \Lambda_\alpha. \quad (\text{A.4.2})$$

Then for $U' \subset\subset U$, we have

$$\|u\|_{2;\alpha;U'} \leq C \left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_{\alpha;U} + \|u\|_{0;U} \right),$$

where C depends only on $n, \alpha, \frac{\Lambda}{\lambda}; \Lambda_\alpha$ and $\text{dist}(U'; \partial U)$.

Bibliography

- [1] U. Abresch; H. Rosenberg, *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Math. **193** (2004), 141-174.
- [2] A. Adamów; R. Deszcz, *On totally umbilical submanifolds of some class of Riemannian manifolds*. Demonstratio Math. **16** (1983), 39-59.
- [3] J.A. Aledo; J.M. Espinar; J.A. Gálvez, *Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Calc. Var. **29** (2007), 347–363.
- [4] J.A. Aledo; J.M. Espinar; J.A. Gálvez, *Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Height estimates and representation*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **38** (2007), 533–554.
- [5] J.A. Aledo; J.M. Espinar; J.A. Gálvez, *The Codazzi equation for surfaces*, Adv. Math. **224** (2010), 2511-2530.
- [6] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large I*, Vestnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5-17.
- [7] N. Ando, *Hartman–Wintner’s theorem and its applications*, Calc. Var. **43** (2012), 389–402.
- [8] A.C. Asperti; F. Mercuri, *Semi-parallel immersions into space forms*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **8** (1994), 883-895.
- [9] A.C. Asperti; G.A. Lobos; F. Mercuri, *Pseudo-parallel immersions of a space form*. Mat. Cont. **17** (1999), 59-70.
- [10] A.C. Asperti; G.A. Lobos; F. Mercuri, *Pseudo-parallel submanifolds of a space form*, Adv. Geom. **2** (2002), 57-71.
- [11] E. Backes; H. Reckziegel, *On Symmetric Submanifolds of Spaces of Constant Curvature*, Math. Ann. **263** (1983), 421-433.
- [12] J.L. Barbosa; M.P. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Zeit. **185** (1984), 339-353.
- [13] M. Bergner, *A halfspace theorem for proper, negatively curved immersions*, Ann. Glob. Anal. Geom. **38** (2010), 191-199.
- [14] R. Bryant, *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 455-473.
- [15] A. Bueno; J.A. Gálvez; P. Mira, *The global geometry of surfaces with prescribed mean curvature in $\mathbb{R}^3$* , Trans. Amer. Math. Soc. DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/8041>

- [16] G. Calvaruso; D. Kowalczyk; J. Van der Veken, *On extrinsically symmetric hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* . Bull. Aust. Math. Soc. **82** (2010), 390-400.
- [17] M.P. do Carmo; M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. **34** (3) (1982), 425-435.
- [18] M.P. do Carmo; E.L. Lima, *Immersiones of manifolds with non-negative sectional curvatures*, Bol. Soc. Bras. Mat (1971), Vol. 2, 9-22.
- [19] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1992), xiv+300 pp. ISBN: 0-8176-3490-8. MR1138207.
- [20] M.P. do Carmo; M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Math. Soc. **277**(2) (1983), 685-709.
- [21] S.S. Chern; M.P. do Carmo; S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*. Functional Analysis and Related Fields, Springer, Berlin (1970), 59-75.
- [22] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2nd ed., Paris, 1946.
- [23] E. Cartan, *Sur une class remarquable d'espaces de Riemannian*, Bull. Soc. Math. France, **54** (1926), 214-264; **55** (1927), 114-134.
- [24] T.E. Cecil; P.J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*. Springer Monographs in Mathematics (2015), ISBN: 978-1-4939-3245-0.
- [25] S.S. Chern, *On minimal spheres in the four-sphere*. Studies and Essays, Math. Res. Center, Nat. Taiwan Univ., Taipei (1970), 137-150.
- [26] U. Clarenz, *Enclosure theorems for extremals of elliptic parametric functionals*, Calc. Var. Partial Differential Equations **15** (2002), Vol.3, 313-324.
- [27] U. Clarenz; H. von der Mosel, *On surfaces of prescribed F -mean curvature*, J. Diff. Geom. **213** (2004), No.1, 15-36.
- [28] M. Dajczer; R. Tojeiro, *Submanifold Theory, Beyond an Introduction*, Univesitext Springer, New York (2019).
- [29] B. Daniel, *Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 6255-6282.
- [30] F. Defever; R. Deszcz; P. Dhooghe; L. Verstraelen; S. Yaprak, *On Ricci-pseudosymmetric hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Results Math. **27** (1995), 227-236.
- [31] C. Delaunay, *Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures et Appl. **6** (1) (1841), 309-320.
- [32] J. Deprez, *Semiparallel surfaces in Euclidean space*, J. Geom. **25** (1985), 192-200.
- [33] J. Deprez, *Semi-parallel Hypersurfaces*, Rend. Sem. Mat. Univer. Politec. Torino, **44** (1986), 303-316.
- [34] R. Deszcz, *Curvature properties of certain compact pseudosymmetric manifolds*, Colloq. Math. **65** (1993), 139-147.

- [35] R. Deszcz, *On certain classes of hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Geometry and topology of submanifolds, VIII (Brussels, 1995/Nordfjordeid, 1995), 101-110, World Sci. Publishing 1996.
- [36] R. Deszcz, *On pseudosymmetric hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Tensor (N.S.) **58** (1997), 253-269.
- [37] R. Deszcz, *On pseudosymmetric spaces*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A **44** (1992), 1-34.
- [38] R. Deszcz; L. Verstraelen; S. Yaprak, *Pseudosymmetric hypersurfaces in 4-dimensional spaces of constant curvature*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **22** (1994), 167-179.
- [39] R. Deszcz; S. Yaprak, *Curvature properties of Cartan hypersurfaces*, Colloq. Math. **67** (1994), 91-98.
- [40] F. Dillen; J. Fastenakels; J. Van der Veken, *Rotation Hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Note Mat. **29** (2009), 41-54.
- [41] F. Dillen, *Semi-parallel hypersurfaces of a real space form*, Israel J. Math. **75** (1991), 193-202.
- [42] F. Dillen; S. Nolker, *Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property*, J. Reine Angew. Math. **435** (1993), 33-63.
- [43] J.M. Espinar; J.A. Gálvez; H. Rosenberg, *Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), No.2, 351-386.
- [44] D. Ferus, *Immersions with parallel second fundamental form*, Math. Z. **140** (1974), 87-93.
- [45] D. Ferus, *Symmetric submanifolds of Euclidean space*, Math. Ann. **247** (1980), 81-93.
- [46] J. Ge; H. Ma, *Anisotropic isoparametric hypersurfaces in euclidean spaces*, Ann. Glob. Anal. Geom. **41** (2012), 347-355.
- [47] D. Gilbarg; N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2001), Reprint of the 1998 edition.
- [48] S. Haesen; L. Verstraelen, *Natural intrinsic geometrical symmetries*, SIGMA **5**, 086, (2009).
- [49] A.J.Y. Hancoco; G.A. Lobos; M.P. Tassi, *Pseudo-parallel surfaces of $\mathbb{S}_c^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}_c^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. New Series **50** (3) (2019), 705-715.
- [50] P. Hartman; L. Nirenberg, *On spherical image whose Jacobians do not change sign*, Amer. J. Math. **81** (1959), 901-920.
- [51] L. Hauswirth; H. Rosenberg; J. Spruck, *On complete mean curvature $\frac{1}{2}$ surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Communications in Analysis and Geometry **5** (2008), vol.16, 989-1005.
- [52] Y.J. He; H.Z. Li, *A new variational characterization of the Wulff shape*, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 377-390.

- [53] Y.J. He; H.Z. Li, *Anisotropic version of a theorem of H. Hopf*, Ann. Global Anal. Geom. **35** (2009), 243-247.
- [54] Y.J. He; H.Z. Li, *Integral formula of minkowski type and new characterization of the Wulff shape*, Acta Mathematica Sinica, English Series **24** (4) (2008), 697-704.
- [55] Y.J. He; H.Z. Li, *Stability of hypersurfaces with constant $(r+1)$ -th anisotropic mean curvature*, Illinois J. Math. **52** (2008), 1301-1314.
- [56] Y.J. He; H.Z. Li; H. Ma; J.Q. Ge, *Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvatures*, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), 853-868.
- [57] D. Hoffman; W.H. Meeks, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, Invent. Math **101** (1990), 373-377.
- [58] D. Hoffman; R. Osserman; R. Schoen, *On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$* , Comment. Math. Helvetici **57** (1982), 519-531.
- [59] E. Hopf, *Elementare Bemerkungen Über Die Lösungen Partieller Differential Gleichungen*, S. B. Preuss. Akad. Phys. Math. Kl. (1927), 147-152.
- [60] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [61] T. Itoh; K. Ogiue, *Isotropic immersion*. J. Diff. Geom. **8** (1973), 305-316.
- [62] H.B. Jenkins, *On two-dimensional variational problems in parametric form*, Arch. Rational Mech. Anal. **8** (1961), 181-206.
- [63] T. Klotz; R. Osserman, *Complete surfaces in $\mathbb{E}^3$ with constant mean curvature*, Comment. Math. Helv. **41** (1966), 313-318.
- [64] M. Koiso; B. Palmer, *Geometry and stability of surfaces with constant anisotropic mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 1817-1852.
- [65] M. Koiso; B. Palmer, *Anisotropic umbilic points and Hopf's Theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature* Indiana Univ. Math. J. **59** (1) (2010), 79-90.
- [66] M. Koiso; B. Palmer, *Rolling construction for anisotropic Delaunay surfaces* Pacific J. Math. **234** (2) (2008), 345-378.
- [67] N.J. Korevaar; R. Kusner; B. Solomon, *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 465-503.
- [68] C. Kuhns; B. Palmer, *Helicoidal surfaces with constant anisotropic mean curvature*, J. Math. Phys, **52** (7) (2011), 073506, 14 pp.
- [69] H.B. Lawson, *Local Rigidity Theorems for Minimal Hypersurfaces*, Ann. of Math., **89** (1969), 187-197.
- [70] F. Lin; B. Yang, *Pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , JP Journal of Geometry and Topology **15**, vol 2, (2014), 99-111.
- [71] J.H.S. de Lira; M. Melo, *Hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature in Riemannian manifolds*, Calc. Var. **50** (2014), 335-364.

- [72] G.A. Lobos, *Pseudo-parallel surfaces in space forms*. Differential Geometry, Valencia, 2001, 197-204, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
- [73] G. Lobos; M. Ortega, *Pseudo-parallel real hypersurfaces in complex space forms*, Bull. Korean Math. Soc. **41** (2004), 609-618.
- [74] G.A. Lobos; M.P. Tassi, *A classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* . Diff. Geom. Appl. **62** (2019), 72-82.
- [75] R. López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2013), ISBN: 978-3-642-39625-0.
- [76] U. Lumiste, *Classification of two-codimensional semi-symmetric submanifolds*, Tartu Riikl. Ul. Toimetised no. 803 (1988), 79-94.
- [77] U. Lumiste, *Normally flat semi-symmetric submanifolds*, Differential geometry and its applications, Dubrovnik, (1988), 159-171, Univ. Novi Sad 1989.
- [78] W.H. Meeks, *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature*, J. Diff. Geom. **27** (1988), 539-552.
- [79] B. Mendonça; R. Tojeiro, *Submanifolds of products of space forms*. Indiana University Mathematics Journal. **62** (2013), 1283-1314.
- [80] B. Mendonça; R. Tojeiro, *Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* . Canad. J. Math. **66** (2014), 400-428.
- [81] F. Manfio; R. Tojeiro, *Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math. **55**, No 1, (2011), 397-415.
- [82] L. Onat, *Some characterizations of the Wulff shape*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348** (2010), 997-1000.
- [83] B. O'Neill, *Isotropic and Kähler immersions*, Canad. J. Math. **17** (1965), 907-915.
- [84] B. Palmer, *Stability of the Wulff shape*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (12) (1998), 3661-3667.
- [85] O. Perdomo, *A dynamical interpretation of the profile curve of CMC twizzlers surfaces*, Pacific J. Math. **258** (2) (2012), 459-485.
- [86] A. Pogorelov, *Continuous maps of bounded variation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **111** (1956), 757-759.
- [87] A. Pogorelov, *Extensions of the theorem of Gauss on spherical representation to the case of surfaces of bounded extrinsic curvature*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) **111** (1956), 945-947.
- [88] H. Rosenberg; R. Souam; E. Toubiana, *General curvature estimates for stable H -surfaces in 3-manifolds and applications*, J. Diff. Geom. **84** (2010), 623-648.
- [89] H. Rosenberg, *Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$* , Illinois J. Math. **46** (2002), 1177-1195.
- [90] P.J. Ryan, *A note on conformally flat spaces with constant scalar curvature*, Proceedings of the 13th Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress, **2**, Canad. Math. Congr., Montreal (1972), 115-124.

- [91] M. Sakaki, *On the curvature ellipse of minimal surfaces in $N^3(c) \times \mathbb{R}$* . Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **22** (2015), 165-172.
- [92] K. Sakamoto, *Constant isotropic surfaces in 5-dimensional space forms*. Geometriae Dedicata **29** (1989), 293-306.
- [93] K. Sakamoto, *Planar geodesic immersions*. Tohoku Math. J. **29** (1977), 25-56.
- [94] R. Sacksteder, *On hypersurfaces with no negative sectional curvatures*, Amer. J. Math. **82** No.3 (1960), 609-630.
- [95] B. Smith; F. Xavier, *Efimov's theorem in dimension greater than two*, Invent. Math. **90** (1987), 443-450.
- [96] Z. I. Szabó, *Structure theorems on Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$* , I: The local version, J. Diff. Geom. **17** (1982), 531-582.
- [97] Z. I. Szabó, *Structure theorems on Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$* , II: The global version, Geom. Dedicata **19** (1985), 65-108.
- [98] M. Takeuchi, *An example of Riemannian manifold satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$ but not $\nabla R = 0$* , Tohoku Math. J. **24** (1972), 105-108.
- [99] M. Takeuchi, *Parallel submanifolds of space forms*, Manifolds and Lie groups, In honor of Yozo Matsushima (J. Hano et al., eds), Birkhäuser, Boston, (1981), 429-447.
- [100] J. Taylor, *Crystalline variational problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1987), 568-588.
- [101] R. Tojeiro, *On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. **41** (2010), No. 2, 199-209.
- [102] J. Van der Veken; L. Vrancken, *Parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. **39**, vol 3, (2008), 355-370.
- [103] L. Verstraelen, *Natural extrinsic geometrical symmetries - an introduction*, Contemporary Mathematics **674**, AMS, (2016), 5-16.



REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

O REITOR DA **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS** NO USO DE SUAS ATRIBUIÇÕES CONFERE A

MARCOS PAULO TASSI

NASCIDO(A) A 19 DE AGOSTO DE 1991, NATURAL DA CIDADE DE SÃO CARLOS - SP,
NACIONALIDADE BRASILEIRA, RG Nº. 48.382.628-5 SSP/SP, O PRESENTE DIPLOMA DE

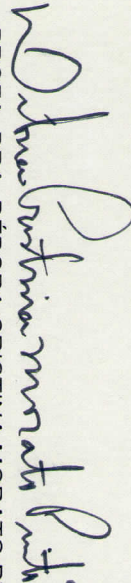
MESTRE EM MATEMÁTICA

TENDO EM VISTA QUE SATISFEZ TODAS AS EXIGÊNCIAS PERTINENTES A ESSE GRAU, ESTABELECIDAS
NAS NORMAS EM VIGOR PARA O **PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

SÃO CARLOS, 29 DE FEVEREIRO DE 2016.


PROF. DR. TARCINO DE ARAÚJO FILHO
REITOR




PROFA. DRA. DÉBORA CRISTINA MORATO PINTO
PRO-REITORA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Universidade Federal de São Carlos

Diploma expedido pelo Setor de Registro
e Controle Acadêmico e registrado no
livroIII..... folha.....35.....

São Carlos, 29. de ~~Janeiro~~ de 2016

Cilene Cunha Prado
Cilene Cunha Prado
Assistente em Administração
Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CAMPUS SÃO CARLOS

INTERESSADO (A) MARCOS PAULO TASSI

TÍTULO OBTIDO MESTRE EM MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO GEOMETRIA E TOPOLOGIA

CONCLUSÃO 30 DE MARÇO DE 2015

SÃO CARLOS, 29 DE FEVEREIRO DE 2016

HOMOLOGADO NA 76ª REUNIÃO DO COPG DE 24/02/2016

Prof. Dr. Targino de Araújo Filho
REITOR

Reconhecido pela Port. MEC 1077, de 31/08/2012
DOU de 13/09/2012

MEC - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Processo Nº. 238/16 Lei 9.394 - DOU de 13/09/2012.

Diploma registrado sob Nº.

São Carlos 27/04/2016

666920

Roseli Aparecida Francisco Barbosa
Roseli Aparecida Francisco Barbosa
Diretora da Divisão de Registro de Diplomas
Delegação Port. GR 263/2009 de 24/08/2009



1º TABELÃO DE NOTAS E DE PROTESTO DE SÃO CARLOS
Rua Major José Inácio, 2186 - Centro - CEP: 13560-160 - São Carlos - SP
FONE/FAX: (0x16) 3373-9000 / SITE: www.1cartorioaoscarlos.nv.br

Reconheço por SEMELHANÇA a firma de
TARGINO DE ARAUJO FILHO; DEBORA CRISTINA MORATO
FILHO.

Em teste 1 da verdade
São Carlos, às 14:43:58 de 01/06/2017.
GUILHERME COSTA MANZANO FERREIRA - ESCRIVENTE
Vir. Recebido por firma RS 11.64

Valido somente com selo de autenticidade, sem emendas ou asturas.



Universidade Federal de São Carlos

Diploma expedido pelo Setor de Registro e Controle Acadêmico e registrado no livro III folha 95

São Carlos, 29 de fevereiro de 2016

Cilene Cunha Prado
Cilene Cunha Prado
Assistente em Administração
Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CAMPUS SÃO CARLOS
INTERESSADO (A) MARCOS PAULO TASSI
TÍTULO OBTIDO MESTRE EM MATEMÁTICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO GEOMETRIA E TOPOLOGIA

CONCLUSÃO 30 DE MARÇO DE 2015
SÃO CARLOS, 29 DE FEVEREIRO DE 2016
HOMOLOGADO NA 76ª REUNIÃO DO COPG DE 24/02/2016

Prof. Dr. Targino de Araújo Filho
REITOR

Reconhecido pela Port. MEC 1077, de 31/08/2012
DOU de 13/09/2012

MEC - UNIVER
Processo Nº 2
Diploma registra
São Carlos 2



CONSELHO
NACIONAL
DE JUSTIÇA
CNU

BRASIL
APOSTILLE
(Convention de La Haye du 5 octobre 1961)

1. País: REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
(Country / Pays):

Este documento público
(This public document / Le présent acte public)

2. Foi assinado por: TARGINO DE ARAÚJO FILHO
(Has been signed by / A été signé par)

3. Na qualidade de: REITOR
(Acting in the capacity of / Agissant en qualité de)

4. Tem o selo / carimbo de: SELO Nº 0974A0074773
(Bears the seal / stamp of / Est revêtu du sceau / timbre de)

Certificado
(Certified / Attesté)

5. Em: São Carlos 6. No dia: 01/06/2017
(At / A)

7. Por: Daniel Corrêa Destro
(By / Par)

8. Nº: 1830766
(Nº / Sous n°)

9. Selo / Carimbo: (Seal / Stamp / Sceau / Timbre)

10. Firma: (Signature)

Assinatura Eletrônica
Electronic Signature
Signature Electronique



Tipo de documento:
(Type of document / Type d'acte)

Nome do titular:
(Name of holder of document / Nom du titulaire)

DIPLOMA DE MESTRE EM MATEMÁTICA
MARCOS PAULO TASSI

Esta Apostila certifica apenas a assinatura, a capacidade do signatário e, quando apropriado, o selo ou carimbo consistentes no documento público. Ela não certifica o conteúdo do documento para o qual foi emitida.

This Apostille certifies only the signature, the capacity of the signatory and, where appropriate, the seal or stamp with which the public document is authenticated. It does not certify the content of the document for which it was issued.

Cette Apostille ne certifie que la signature, la qualité en tant que signataire et, le cas échéant, le sceau ou le timbre dont le document public est authentifié. Elle ne certifie pas le contenu du document pour lequel elle a été émise.

A autenticidade desta Apostila e de sua assinatura eletrônica, bem como o documento público subjacente, podem ser verificadas em:

The authenticity of the Apostille and its electronic signature, along with the underlying public document, may be verified at:

L'authenticité de cette Apostille, de la signature électronique, ainsi que de l'acte public sous-jacent peut être vérifiée sur:

Any questions about this Apostille may be directed to the Embassies of the CNU

Veuillez contacter l'ambassade de la CNU pour toute question relative à cette Apostille.

Veuillez utiliser ce Code QR pour vérifier l'authenticité de la signature électronique et du acte public sous-jacent est également disponible sur la même page.



Código (Code): 1830766
CNU

260E608D



www.cnu.jus.br/apostilaconferencia

55 61 2326-4607

17.0.00491987-1

A0289769

Personal Information	
Name	Marcos Paulo Tassi
Nationality	Brazilian
Passport number	FS 068952
Age	30 years old
Bibliographic Citation	TASSI, M. P.; TASSI, M.P.
ID Plataforma Lattes	1570725927893832 Address to access this CV: http://lattes.cnpq.br/1570725927893832

Presentation
In 2013, I obtained my Bachelor Degree in Mathematics from Federal University of São Carlos. In 2013, I ingressed in the Master's Program in Mathematics of Federal University of São Carlos, and I concluded the same in 2015, under the supervision of Professor Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra. In 2015, I ingressed as a student with CAPES scholarship in the Doctorate Program in Mathematics of Federal University of São Carlos, under the initial supervision of Professor Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra. In 2017, I obtained a sandwich scholarship from CAPES (PDSE/88881.133043/2016-01) for a year of study (2017-2018) in University of Granada, in the Department of Geometry and Topology, under the supervision of Professor Dr. José Antonio Gálvez López. In 2019, I obtained a Double Degree of Doctor in Mathematics from Federal University of São Carlos and from University of Granada. My research area is Differential Geometry, with emphasis in Submanifold Theory and Geometric Analysis, where I study the following topics: pseudo-parallel submanifolds, constant anisotropic mean curvature surfaces and uniqueness of immersed spheres modeled by elliptic PDE fields.

Formal Education Degree	
2015-2019	Ph.D. in Mathematics Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil, and University of Granada, UGR, Spain Year of degree: 2019 Advisors: Guillermo Antonio Lobos Villagra (UFSCar) José Antonio Gálvez López (UGR) Thesis: Pseudo-parallel immersions in $S^n \times \mathbb{R}$ and $H^n \times \mathbb{R}$, and constant anisotropic mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$ Grantee of: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, Brazil
2013-2015	Master in Mathematics Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil Year of degree: 2015 Advisor: Guillermo Antonio Lobos Villagra (UFSCar) Dissertation: Classificação das hipersuperfícies paralelas e semi-paralelas em $S^n \times \mathbb{R}$ Grantee of: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, Brazil
2010-2013	Bachelor Degree in Mathematics Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil Year of degree: 2013

Complementary Education	
2018-2018	Quasi-geodesic Flows. (Credit Hours: 6h). University of Granada, UGR, Spain.
2015-2015	Summer Course in Differential Topology. (Credit Hours: 60h). Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil.
2013-2013	Summer Course in Advanced Calculus. (Credit Hours: 60h). Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil.
2012-2012	Summer Course in Real Analysis. (Credit Hours: 60h). Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil.
2012-2012	Summer Course in Linear Algebra. (Credit Hours: 60h). Federal University of São Carlos, UFSCar, Brazil.

Research Identifiers	
Web of Science ResearcherID	A-5209-2019
ORCID identifier	0000-0002-9575-1434
Google Scholar URL: https://scholar.google.com.br/citations?user=0x2tU_UAAAAJ&hl=ptBR&oi=ao	

Areas of Expertise	
1	Major Area: Exact and Earth Sciences / Area: Mathematics / Subarea: Geometry and Topology / Specialty: Differential Geometry.

Bibliographical Production	
Articles in Scientific Journals	
1	LOBOS, G.A.; TASSI, M.P.. <i>A classification of pseudo-parallel hypersurfaces of $S_{n \times R}$ and $H_{n \times R}$</i> . DIFFERENTIAL GEOMETRY AND ITS APPLICATIONS, 62 , 72-82, 2019. Citations (Google Scholar): 2
2	LOBOS, G.A.; TASSI, M.P.; HANCCO, A.J. YUCRA. <i>Pseudo-parallel surfaces of $S_{n \times R}$ and $H_{n \times R}$</i> . BULLETIN OF THE BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY, 50 , 705-715, 2018. Citations (Google Scholar): 0
3	GÁLVEZ, J.A.; MIRA, P.; TASSI, M.P.. <i>A quasiconformal Hopf soap bubble theorem</i> . CALCULUS OF VARIATIONS AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, to appear. Citations (Google Scholar): 0
Talks	
1	Workshop on Submanifold Theory and Geometric Analysis, Constant anisotropic mean curvature surfaces, São Carlos, Brazil, 2019. URL: https://www.dm.ufscar.br/ppgm/index.php/extensao/eventos/wstga
2	Seminario del Departamento de Geometría y Topología, Superficies de Curvatura Media Anisotrópica Constante, Granada, Spain, 2019. (Seminário). URL: https://wpd.ugr.es/~geometry/seminar/es
Poster Presentations	
1	31º Colóquio Brasileiro de Matemática, <i>Classification of Pseudo-Parallel Hypersurfaces of $S_{n \times R}$ and $H_{n \times R}$</i> , Rio de Janeiro, Brazil, 2017. URL: https://impa.br/eventos-do-imp/imp-2017/31o-coloquio-brasileiro-de-matematica/
2	XIX School on Differential Geometry, <i>Pseudo-Parallel Surfaces of $S_{3 \times R}$ and $H_{3 \times R}$</i> ,

	Rio de Janeiro, Brazil, 2016. URL: https://impa.br/sobre/memoria/reunioes-cientificas/xix-school-on-differential-geometry/
3	VII Workshop on Differential Geometry. <i>Pseudo-Parallel Surfaces of $Sn_{cx}R$ and $Hn_{cx}R$</i> , Maceió, Brazil, 2017. URL: https://geometry-maceio.sciencesconf.org/
Other Bibliographical Production	
1	GALVEZ, J.A.; MIRA, P.; TASSI, M.P.. <i>Complete surfaces of constant anisotropic mean curvature</i> , 2019, Preprint. https://arxiv.org/abs/1912.01941

Languages	
1	English Comprehends Reasonably, Speaks Reasonably, Reads Well, Writes Reasonably.
2	Portuguese Comprehends Well, Speaks Well, Reads Well, Writes Well.
3	Spanish Comprehends Well, Speaks Well, Reads Well, Writes Well.

Awards and Titles	
2009	Silver medal in the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP).
2008	Silver medal in the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP).
2007	Honorable mention in the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP).
2006	Golden medal in the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP).

Participation in Events	
1	Seminario del Departamento de Geometría y Topología. <i>Superficies de Curvatura Media Anisotrópica Constante</i> , Granada, Spain, 2019. (Seminar).
2	Workshop on Submanifold Theory and Geometric Analysis. <i>Constant Anisotropic Mean Curvature Surfaces</i> , São Carlos, Brazil, 2019. (Congress).
3	31º Colóquio Brasileiro de Matemática. <i>Classification of Pseudo-Parallel Hypersurfaces of $SnxR$ and $HnxR$</i> , Rio de Janeiro, Brazil, 2017. (Congress).
4	VII Workshop on Differential Geometry. <i>Pseudo-Parallel Surfaces of $Sn_{cx}R$ and $Hn_{cx}R$</i> , Maceió, Brazil, 2017. (Congress).
5	6º Ciclo de Palestras da Pós-Graduação. <i>Superfícies Mínimas</i> , São Carlos, Brazil, 2016. (Seminar).
6	First Student's Day. <i>Classification of Pseudo-Parallel Hypersurfaces of $SnxR$ and $HnxR$</i> , São Carlos, Brazil, 2016. (Workshop).
7	XIX School on Differential Geometry. <i>Pseudo-Parallel Surfaces of $S3xR$ and $H3xR$</i> , Rio de Janeiro, Brazil, 2016. (Congress).
8	Escola de Verão de Geometria e Topologia, São Carlos, Brazil, 2012. (Congress).
9	XIX Congresso de Iniciação Científica da UFSCar. <i>Estudo de um tema sobre transformações do plano através da metodologia investigação</i> , São Carlos, Brazil, 2011. (Congress).

Other Relevant Information

I spent a period of investigation in Spain, invited by Professor José Antonio Gálvez López, from the Department of Geometry and Topology of University of Granada, during 09/05/2019 to 11/20/2019 and completely supported by the Investigation Project "Superficies y ecuaciones en derivadas parciales geométricas" of the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness (reference MTM2016-80313-P). During the investigation period, I gave a talk entitled "Superficies de Curvatura Media Anisotrópica Constante".

